**Предмет: Математика**

**Преподаватель: Буракова С.М.**

**Раздел: Комбинаторика**

**Тема урока: Комбинаторные задачи**

**Тип урока: Урок изучения нового материала**

**Форма урока: семинар**

**Задача урока: познакомить обучающихся с понятием «комбинаторика» как разделом математики, историей ее возникновения и основными методами решения комбинаторных задач.**

**Цели урока:**

**Обучающие:**

* познакомить обучающихся с понятием «комбинаторика»;
* познакомитьобучающихся с историей возникновения комбинаторики как раздела математики;
* познакомить обучающихся с правилами сложения и умножения при решении комбинаторных задач;
* познакомить обучающихся с основными методами решения комбинаторных задач;
* закрепить методы решения комбинаторных задач на конкретных примерах.

**Развивающие:**

* развитие комбинаторного мышления обучающаяся;
* формирование интеллектуальных умений: анализировать, выделять главное, сравнивать, обобщать и систематизировать, разрешать проблемы;
* развитие умений владеть собой;
* развитие инициативы, уверенности в своих силах, умения преодолевать трудности в учении.

**Воспитывающие:**

* содействовать формированию основных мировоззренческих идей;
* содействовать профориентации учащихся;
* содействовать формированию организованности, собранности, внимательности, аккуратности.

**Дидактический материал:**

* 1. Карточки в виде опорного конспекта;
	2. Карточка с кроссвордом;
	3. Презентация;
	4. Аудиозапись басни И.А. Крылова «Квартет»;
	5. Рисунки на школьной доске;

**Оборудование к уроку**: проектор, компьютер.

**Структура урока:**

1. Организационный момент.
2. Мотивация и сообщение темы урока.
3. Ознакомление с историей возникновения комбинаторики как раздела математики.
4. Формирование новых понятий и способов действий.
5. Обобщение первичных знаний и их систематизация.
6. Подведение итогов, задание на дом.

**Ход урока:**

***Высшее назначение математики…***

***состоит в том, чтобы находить скрытый***

***порядок в хаосе, который нас окружает.***

***Норберт Винер***

* 1. **Организационный момент.**
	2. **Мотивация и сообщение темы урока.**

Сразу оговорим сегодняшнюю работу на уроке: в тетради записываем только условие и решение задач, весь основной теоритический материал сегодняшнего урока включен в карточку, которая лежит у вас на столе, там же находятся и домашние задачи. Карточка остается у вас.

Ребята мы с вами начинаем изучение сравнительно нового раздела математики, который называется комбинаторика. Тема урока: **«Комбинаторные задачи».** Какова же цель нашего урока?  **Познакомить обучающихся с понятием «комбинаторика» как разделом математики, историей ее возникновения, места в науке, и основными методами решения комбинаторных задач.**

 Знание комбинаторики нам в скором времени пригодятся для изучения еще одного сравнительно молодого раздела математики – элементы теории вероятностей и математической статистики.

* 1. **Ознакомление с историей возникновения комбинаторики как раздела математики.**

**(Самостоятельная работа студентов:**

**Доклад и презентация на тему: «История возникновения комбинаторики как раздела математики»)**

* Выбором объектов и расположением их в том или ином порядке приходится заниматься чуть ли не во всех областях человеческой деятельности, например конструктору, разрабатывающему новую модель механизма, ученому-агроному, планирующему распределение сельскохозяйственных культур на нескольких полях, химику, изучающему строение органических молекул, имеющих данный атомный состав.
* С аналогичными задачами, получившими название комбинаторных, люди столкнулись в глубокой древности. Уже несколько тысячелетий назад в Древнем Китае увлекались составлением магических квадратов (см. Магические и латинские квадраты), в которых заданные числа располагали так, что их сумма по всем горизонталям, вертикалям и главным диагоналям была одной и той же.



* В Древней Греции подсчитывали число различных комбинаций длинных и коротких слогов в стихотворных размерах, занимались теорией фигурных чисел, изучали фигуры, которые можно составить из частей особым образом разрезанного квадрата, и т.д.
* Среди родоначальников комбинаторики и теории вероятности надо назвать знакомые имена – Паскаля и Ферма, Бернулли и Лапласа и, разумеется,Эйлера.

****
***Блез* Паскаль(**1623-1662)

****

***Якоб* Бернулли (1654-1705)**

****

***Пьер* Ферма (1601-1665)**

****

***Пьер-Симон* Лаплас (1749-1827)**

* Комбинаторные задачи возникали и в связи с такими играми, как шашки, шахматы, домино, карты, кости и т.д.
* Комбинаторика становится наукой лишь в XVII в. – в период, когда возникла теория вероятностей. Чтобы решать теоретико-вероятностные задачи, нужно было уметь подсчитывать число различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям.
* К середине, XVII в. вероятностные вопросы и проблемы, возникающие в статистической практике, в практике страховых обществ, при обработке результатов наблюдений и в других областях, привлекли  внимание ученых, так как они стали актуальными вопросами.

Такие задачи изучали французские математики Б. Паскаль и П. Ферма.

* Первым рассматривал комбинаторику как самостоятельную ветвь науки немецкий философ и математик Г. Лейбниц, опубликовавший в 1666 г. работу «Об искусстве комбинаторики», в которой впервые появляется сам термин «комбинаторный».



Готфрид Вильгельм

фон Лейбниц (21 июня 1646- 14 ноября 1716)

* Замечательные достижения в области комбинаторики принадлежат Л. Эйлеру.



Швейцарский математик,

Физик, астроном (1707 – 1783)

* Комбинаторными задачами интересовались и математики, занимавшиеся составлением и разгадыванием шифров, изучением древних письменностей. Теперь комбинаторика находит приложения во многих областях науки: в биологии, где она применяется для изучения состава белков и ДНК, в химии, механике сложных сооружений и т.д.
	1. **Формирование новых понятий и способов действий.**

Что же такое комбинаторика?

**Комбинаторика** – это раздел математики, в котором изучаются вопросы, о том сколько различных комбинаций можно составить с учетом определенных условий.

 Термин «комбинаторика» происходит от латинского слова *«combina»*, что в переводе на русский язык означает – «сочетать», «соединять».

 При решении многих практических задач приходится использовать комбинации элементов,  выбирать из данной совокупности те, которые имеют определенные свойства, и размещать их в определенном порядке. Такие задачи называются **комбинаторными**.

 Отметим тот факт, что все комбинаторные задачи сюжетные и очень разные. Не приемлют четкого алгоритма при решении, требуют вдумчивого подхода и анализа условия. Но все же кое-какую классификацию и основные подходы к их решению мы с вами сегодня рассмотрим.

**Методы решения комбинаторных задач**:

* 1. Перебор возможных вариантов;
	2. Построение дерева возможных вариантов;
	3. Решение комбинаторных задач с помощью правил сложения и умножения;
	4. С помощью формул для числа размещений с повторениями, размещений без повторений, перестановок, сочетаний.
1. **Перебор возможных вариантов**

**Задача**

Сколько двузначных чисел можно составить используя цифры 1,4,7?

**Решение:**

**11 41 71**

**14 44 74**

**17 47 77**

**Ответ:**  9 двузначных чисел

1. **Построение дерева возможных вариантов**

Решим эту же задачу вторым способом

1 4 7

 1 4 7 1 4 7 1 4 7

Выпишем двузначные числа, составляя их по вертикали: 11, 14, 17, 41, 44, 47, 71, 74, 77.

1. **Решение комбинаторных задач с помощью правил сложения и умножения**

**Правило сложения**

Если некоторый объект А можно выбрать **m** способами, а другой объект В можно выбрать **n** способами, то выбор объекта либо А, либо В можно осуществить **m + n** способами.

**Правило умножения**

Если объект А можно выбрать **m** способами и если после каждого такого выбора объект В можно выбрать **n** способами, то выбор пары А и В можно осуществить **m · n** способами.

**Задачи:**

**1)**Сколько существует пятизначных чисел, на третьей позиции которого стоит цифра 3?

**Решение:**

 3

 9 \* 10 \* 1 \* 10 \* 10 = 9000 возможных вариантов

**2)** Сколько существует пятизначных чисел, на конце которых стоит четное число?

**Решение:**

 Существует пять четных чисел: 0; 2; 4; 6; 8.

 9 \* 10 \* 10 \* 10 \* 5 = 45000 возможных вариантов

**3)** Сколько существует пятизначных чисел на нечетных позициях которых стоят нечетные числа?

**Решение:**

 5 \* 10 \* 5 \* 10 \* 5 = 12500 возможных вариантов

Прежде чем приступить к следующему методу решения комбинаторных задач введем понятие факториала.

**Обозначение:**

**! – факториал**

**Определение**: n! называется произведение чисел от 1 до n.

n ! = 1\*2\*3\*4\* … \* n

**Помним 0! = 1, 1! = 1.**

**Пример:**

5! = 1\*2\*3\*4\*5=120

Как ни странно, в литературе можно найти достаточное количество математической информации. Так, например, в произведении Л.Н. Толстого «Война и мир» во втором томе можно найти весьма интересные рассуждения о сущности производной и интеграла применительно к историческим процессам. Об этом поговорим чуть позже. А вот Иван Андреевич Крылов известный русский баснописец предлагает нам в своей басне «Квартет» классическую комбинаторную задачу.

Вначале прослушаем ее.

КВАРТЕТ

Проказница-Мартышка,
Осел,
Козел,
Да косолапый Мишка,
Затеяли сыграть Квартет.
Достали нот, баса, альта, две скрипки,
И сели на лужок под липки,—
Пленять своим искусством свет.
Ударили в смычки, дерут, а толку нет.
 «Стой, братцы, стой!» - кричит Мартышка: «Погодите!
Как музыке идти? Ведь вы не так сидите.
Ты с басом, Мишенька, садись против альта,
Я, прима, сяду против вторы;
Тогда пойдет уж музыка не та:
У нас запляшут лес и горы!»
Расселись, начали Квартет;
Он всё-таки на лад нейдет.
«Постойте ж, я сыскал секрет»,
Кричит Осел: «Мы, верно, уж поладим,
 Коль рядом сядем».
Послушались Осла: уселись чинно в ряд;
А всё-таки Квартет нейдет на лад.
Вот, пуще прежнего, пошли у них разборы,
И споры,
Кому и как сидеть.

Случилось Соловью на шум их прилететь.
Тут с просьбой все к нему, чтоб их решить сомненье:
«Пожалуй», говорят: «возьми на час терпенье,
Чтобы Квартет в порядок наш привесть:
 И ноты есть у нас, и инструменты есть:
Скажи лишь, как нам сесть!» —
«Чтоб музыкантом быть, так надобно уменье,
И уши ваших понежней»,
Им отвечает Соловей:
«А вы, друзья, как ни садитесь,
Всё в музыканты не годитесь».

Решение

Итак, имеем 4 персонажа(объекта): мартышка, козел, осел, медведь, и 4 места.

 Необходимо подсчитать число возможных вариантов размещения указанных персонажей.
 **Отмечаем, что число мест равно числу объектов и объекты не повторяются.**

 Таким образом,

Мартышка может сесть на одно из 4 мест.

Козел на одно из оставшихся 3 мест.

Осел на одно из оставшихся 2 мест.

И мишка может сесть на оставшиеся 1 место.

 4 \* 3 \* 2 \* 1 = 24 возможных варианта,

т.е. 4! = 4 \*3 \* 2 \* 1 = 24

Рассмотренный пример – это классический пример соединения – **перестановка.**

Дадим определение.

**Перестановка – это расположение объектов в определенном порядке.**

**Ее особенности:**

1. Учитывается порядок элементов, входящих в соединение.
2. Все элементы входят в соединение, т.е. число мест равно числу объектов.

**Формула:**

**Pn = n!,** где n – количество объектов (мест);

Следующий вид соединения, который буде рассматривать – это **размещение**.

Определение:

**Размещение – это поочередный выбор элементов из данного множества.**

Размещение может быть двух видов:

1. Размещения с повторениями;
2. Размещения без повторений.

Рассмотрим соответствующие задачи:

**Задача 1(размещения с повторениями)**

Подсчитаем число трехбуквенных слов, составленных из пятибуквенного алфавита. Буквы могут повторяться.

**Решение:**

Отметим, имеем 3 места и 5 объектов, т.е. число мест не равно числу объектов.

На первое место можно поставить любую из 5 букв, на второе – тоже любую из 5 букв, и на третье место – любую из 5 букв.

1 2 3

 5 \* 5 \* 5 =$ 5^{3}$= 125 вариантов слов

**Ответ: 125 слов.**

Следовательно, получаем **формулу для соединения размещение с повторений:**

$А\_{n}^{k}$ **=**$n^{k}$**,** где

$n$ – количество мест,

**k**– количество объектов.

**Особенности**:

1. Учитывается порядок элементов входящих в соединение.
2. В соединении количество мест не равно количеству объектов.
3. Элементы в соединении могут повторяться.

**Задача 2 (размещение без повторений)**

Подсчитаем число трехбуквенных слов, составленных из пятибуквенного алфавита. Буквы не могут повторяться.

**Решение:**

На первое место поставим любую из 5 букв. Т.к. буквы повторяться не могут, то на второе место поставим любую из 4 букв, а на третье – любую из 3 букв.

1 2 3

 5 \* 4 \* 3 = 60 вариантов слов

**Ответ: 60 слов.**

Следовательно, получаем **формулу для соединения размещение без повторениями:**

$А\_{n}^{k}$ **=** $\frac{n!}{\left(n-k\right)!}$**,** где

$n$ – количество объектов,

**k**– количество мест.

**Особенности**:

1. Учитывается порядок элементов входящих в соединение.
2. В соединении количество мест не равно количеству объектов.
3. Элементы в соединении не могут,повторяются.

**Обратим внимание на то, что если в последней формуле n будет равно k, то получим**$, А\_{n}^{k}$ **=** $\frac{n!}{\left(n-k\right)!}$ **=** $\frac{n!}{\left(n-n\right)!}$ **=** $\frac{n!}{0!}$ **=** $\frac{n!}{1}$ **=** $n!$ **= Pn, т.е.**

Соединение перестановка – это частный случай соединения размещение без повторений.

И рассмотрим последний вид соединения – **сочетание.**

Дадим определение.

**Сочетание – это одновременный выбор элементов из данного множества**.

**Формула**: $ С\_{n}^{k}$ **=** $\frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}$

Какая же главная отличительная особенность этого соединения от всех ранее рассмотренных?

**В соединении сочетание – не важен порядок элементов.**

Продемонстрируем этот вид соединения на конкретной задаче.

**Задача (сочетание)**

Сколькими способами из 5 человек можно избрать комиссию, состоящую из 3 человек.

**Решение:**

Очевидно, что в каком порядке будут располагаться, выбранные в комиссию люди совершенно не важно. А это и говорит нам о том, что данное соединение - сочетание.

Следовательно, $ С\_{n}^{k}$ **=** $\frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}$ **=** $\frac{5!}{3!\left(5-3\right)! }$**=** $\frac{5!}{3!2!}$**=**$\frac{5\*4\*3\*2\*1}{3\*2\*1\*2\*1}$ **= 10** способов

**Ответ: 10 способов.**

Имеет смысл рассмотреть еще одну задачу, которая нам демонстрирует применение при решении комбинаторных задач **правила сложения.**

**Задача**

Алфавит состоит из 5 букв. Сколько можно составить слов из букв этого алфавита, имеющих не более трех букв.

**Решение:**

Для определения количества однобуквенных, двухбуквенных и трехбуквенных слов используем формулу для соединения - **размещение с повторениями**.

Тогда, однобуквенных слов будет - 5.

Двухбуквенных слов - $5^{2}$.

Трехбуквенных слов - $5^{3}$.

Т.к. одинаковых слов нет, то используя **правило сложения**, получим:

5 +$ 5^{2}$+ $5^{3}$ = 5 + 25 + 125 = 155 слов.

Ответ: 125 слов.

**5. Обобщение первичных знаний и их систематизация.**

Большинство комбинаторных задач решается с помощью двух основных правил – **правила суммы и правила произведения**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Выбор правила** | **Выбор правила** |
| **Правило суммы** | **Правило произведения** |
| Если некоторый объект А можно выбрать **m** способами, а другой объект В можно выбрать **n** способами, то выбор объекта либо А, либо В можно осуществить **m + n** способами. | Если объект. А можно выбрать **m**способами и если после каждого такого выбора объект В можно выбрать **n** способами, то выбор пары А и В можно осуществить **m · n** способами. |

Для успешного решения комбинаторных задач надо еще и правильно выбрать формулу, по которой искать количество нужных соединений. В этом поможет следующая схема.



**Таким образом, успешное решение комбинаторной задачи зависит от:**

1. **правильного анализа условия задачи;**
2. **определения типа соединений, которые будут составляться;**
3. **выбора подходящей формулы для вычисления их количества.**

**6.Подведение итогов, задание на дом**

Подведем итоги урока.

Сегодня на уроки:

1. познакомились с понятием «комбинаторика»;

2.познакомились с историей возникновения комбинаторики как раздела математики;

1. познакомились с правилами сложения и умножения при решении комбинаторных задач;
2. познакомились с основными методами решения комбинаторных задач;
3. закрепили методы решения комбинаторных задач на конкретных примерах.

**Задание на дом:**

Карточки в виде опорного конспекта с основным теоретическим материалом, который следует выучить к следующему уроку и в них включенными домашними задачами. Ребята получают консультации по выполнению домашних задач.

**Задачи на дом**:

1. Сколько существует четырёхзначных чисел на второй позиции, которого стоит цифра 5?

**Решение:**

По правилу умножения имеем:

9\*1\*10\*10 = 900 четырехзначных чисел.

**Ответ: 900**

1. Найдите количество трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если цифры в числе повторяться не могут.

**Решение:**

Тип соединения – размещение без повторений.

Имеем 3 места и 7 объектов.

$А\_{n}^{k}$ **=** $\frac{n!}{\left(n-k\right)!}$

$А\_{7}^{3}$ = $\frac{7!}{\left(7-3\right)!}$ = $\frac{7!}{4!}$ = $\frac{7\*6\*5\*4\*3\*2\*1}{4\*3\*2\*1}$ = 7\*6\*5 = 210 чисел

**Ответ: 210**

1. Имеется 6 видов овощей. Решено готовить салат из трех видов овощей. Сколько различных салатов можно приготовить?

**Решение:**

Тип соединения – сочетание.

Имеем 3 места и 6 объектов.

$ С\_{n}^{k}$ **=** $\frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}$

$ С\_{6}^{3}$ = $\frac{6!}{3!\left(6-3\right)!}$ = $\frac{6!}{3!\*3!}$ = $\frac{6\*5\*4\*3\*2\*1}{3\*2\*1\*3\*2\*1}$ = 5\*4 = 20 салатов

**Ответ: 20**

**Резерв времени: разгадывание кроссвордав качестве закрепления теоретического материала.**

**Кроссворд**

**По горизонтали:**

**1.**Как называется раздел математики, в котором изучается вопросы о том, сколько различных комбинаций подчиненных тем или иным условиям можно составить из данных объектов?.

**2.**Назовите ученного, которому принадлежат  замечательные достижения  в области комбинаторики.

**3.**Как называется размещение из n элементов по n.

**По вертикали:**

**4.** Как называется символ ! в комбинаторике?

**5.**Соединения, различающихся  либо порядком, либо самими элементами.

**6.**Соединения, не различающиеся друг от друга порядком.





**Приложение**

**Карточка**

**Комбинаторика** – это раздел математики, в котором изучаются вопросы, о том сколько различных комбинаций можно составить с учетом определенных условий.

**Методы решения комбинаторных задач**:

* 1. Перебор возможных вариантов;
	2. Построение дерева возможных вариантов;
	3. Решение комбинаторных задач с помощью правил сложения и умножения;
	4. С помощью формул для числа размещений с повторениями, размещений без повторений, перестановок, сочетаний.

|  |  |
| --- | --- |
| **Правило суммы** | **Правило произведения** |
| Если некоторый объект А можно выбрать **m** способами, а другой объект В можно выбрать **n** способами, то выбор объекта либо А, либо В можно осуществить **m + n** способами. | Если объект. А можно выбрать **m** способами и если после каждого такого выбора объект В можно выбрать **n** способами, то выбор пары А и В можно осуществить **m · n** способами. |

**! – факториал**

**Определение**: n! называется произведение чисел от 1 до n.

n! = 1\*2\*3\*4\* … \* n

**Помним 0! = 1, 1! = 1.**

**Перестановка – это расположение объектов в определенном порядке.**

**Ее особенности:**

* 1. Учитывается порядок элементов, входящих в соединение.
	2. Все элементы входят в соединение, т.е. число мест равно числу объектов.

**Формула:**

**Pn = n!,** где n – количество объектов (мест);

**Размещение – это поочередный выбор элементов из данного множества.**

**Формула для соединения размещение с повторениями:**

$А\_{n}^{k}$ **=**$n^{k}$**,** где

$n$ – количество объектов,

**k**– количество мест.

**Формула для соединения размещение без повторениями:**

$А\_{n}^{k}$ **=** $\frac{n!}{\left(n-k\right)!}$**,** где

$n$ – количество объектов,

**k**– количество мест.

**Сочетание – это одновременный выбор элементов из данного множества**.

**Формула**: $ С\_{n}^{k}$ **=** $\frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}$

**В соединении сочетание – не важен порядок элементов.**



**Задачи на дом**:

**1.** Сколько существует четырёхзначных чисел на второй позиции, которого стоит цифра 5?

**2.** Найдите количество трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если цифры в числе повторяться не могут.

**3.** Имеется 6 видов овощей. Решено готовить салат из трех видов овощей. Сколько различных салатов можно приготовить?