Комбинаторика

При решении многих практических задач приходится использовать комбинации элементов,  выбирать из данной совокупности те, которые имеют определенные свойства, и размещать их в определенном порядке. Такие задачи называются **комбинаторными**. Раздел математики, посвящённый решению задач выбора и расположения элементов в соответствии с данными условиями, называется комбинаторикой. Термин «комбинаторика» происходит от латинского слова *«combina»*, что в переводе на русский язык означает – «сочетать», «соединять».

Выбранные группы элементов называют соединениями. Если все элементы соединения разные, то получаем соединения без повторений, которые и рассмотрим ниже.

Большинство комбинаторных задач решается с помощью двух основных правил – **правила суммы и правила произведения**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Выбор правила** | **Выбор правила** |
| **Правило суммы** | **Правило произведения** |
| Если некоторый объект А можно выбрать **m** способами, а другой объект В можно выбрать **n** способами, то выбор объекта либо А, либо В можно осуществить **m + n** способами. | Если объект А можно выбрать **m** способами и если после каждого такого выбора объект В можно выбрать **n** способами, то выбор пары А и В можно осуществить **m · n** способами. |

**Задача 1.**

**В магазине «Все для чая» есть 6 разных чашек и 4 разных блюдца. Сколько вариантов чашки и блюдца можно купить?**

***Решение*.**

Чашку мы можем выбрать 6-ю способами, а блюдце 4-я способами. Так как нам надо купить пару чашку и блюдце, то это можно сделать 6 · 4 = 24 способами (по правилу произведения).

***Ответ: 24.***

Для успешного решения комбинаторных задач надо еще и правильно выбрать формулу, по которой искать количество нужных соединений. В этом поможет следующая схема.

Рассмотрим решение нескольких задач на разные виды соединений без повторений.

**Задача 2.**

**Найдите количество трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если цифры в числе повторяться не могут.**

***Решение.***

Для выбора формулы выясняем, что для чисел, которые мы будем составлять, порядок учитывается и не все элементы одновременно выбираются. Значит, это соединение – размещение из 7 элементов по 3. Воспользуемся формулой для числа размещений: A73 = 7(7 – 1)(7 – 2) = 7 · 6 · 5 = 210 чисел.

***Ответ: 210.***

**Задача 3.**

**Сколько существует семизначных телефонных номеров, в которых все цифры разные, а номер не может начинаться с нуля?**

***Решение.***

На первый взгляд эта задача такая же, как и предыдущая, но сложность в том, что надо не учитывать те соединения, которые начинаются с нуля. Значит необходимо из существующих 10-ти цифр составить все семизначные номера телефонов, а потом от полученного числа отнять количество номеров, начинающихся с нуля. Формула будет иметь вид:

A107– A96 = 10 · 9 · 8 · 7 · 6 · 5 · 4 – 9 · 8 · 7 · 6 · 5 · 4 = 544 320.

***Ответ: 544 320.***

**Задача 4.**

**Сколькими способами можно расставить на полке 12 книг, из которых 5 книг – это сборники стихотворений, так, чтобы сборники стояли рядом?**

***Решение.***

Сначала примем 5 сборников условно за одну книгу, потому что они должны стоять рядом. Так как в соединении существенным есть порядок, и все элементы используются, значит  это перестановки из 8 элементов (7 книг + условная 1 книга). Их количество Р8. Далее будем переставлять между собой только сборники стихотворений. Это можно сделать Р5 способами. Поскольку нам нужно расставить и сборники, и другие книги, то воспользуемся правилом произведения. Следовательно, Р8 · Р5 = 8! · 5!. Число способов будет большим, поэтому ответ можно оставить в виде произведения факториалов.

***Ответ: 8! · 5!***

**Задача 5**.

**В классе 16 мальчиков и 12 девочек. Для уборки территории возле школы нужно 4 мальчика и 3 девочки. Сколькими способами можно их выбрать со всех учеников класса?**

***Решение.***

Сначала отдельно выберем 4 мальчика из 16 и 3 девочки из 12. Так как порядок размещения не учитывается, то соответственные соединения – сочетания без повторений. Учитывая необходимость одновременного выбора и мальчиков, и девочек, используем правило произведения. В результате число способов будет вычисляться таким образом:

С164 · С123 = (16!/(4! · 12!)) · (12!/(3! · 9!)) = ((13 · 14 · 15 · 16) / (2 · 3 · 4)) ·((10 · 11 · 12) / (2 · 3)) = 400 400.

***Ответ: 400 400.***

Таким образом, успешное решение комбинаторной задачи зависит от правильного анализа ее условия, определения типа соединений, которые будут составляться, и выбора подходящей формулы для вычисления их количества.