**Векторы в пространстве**

**Определение 9.1.**

**Вектор – направленный отрезок.** Другими словами, вектором называется отрезок, для которого указано, какой из его концов является началом, а какой концом.

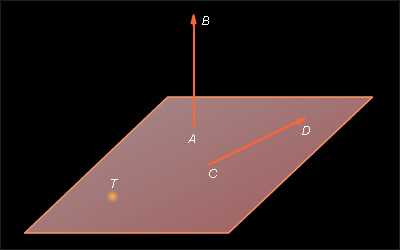


Рисунок 9.1.1.

На рисунках направление вектора обозначается стрелкой от начала к концу. Если длина рассматриваемого отрезка равна нулю, то есть отрезок вырождается в точку, то эта точка тоже может рассматриваться как вектор. Такой вектор называется нулевым и имеет произвольное направление.

**На рисунке 9.1.1** изображены ненулевые векторы и  и нулевой вектор Нулевой вектор иногда обозначается символом 

**Определение 9.2.**

**Длиной** (модулем) ненулевого вектора называется длина отрезка AB. Она обозначается как Длина нулевого вектора равна нулю: 

**Определение 9.3.**

**Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.**

Поскольку нулевой вектор может иметь произвольное направление, то разумно считать его коллинеарным любому ненулевому вектору.

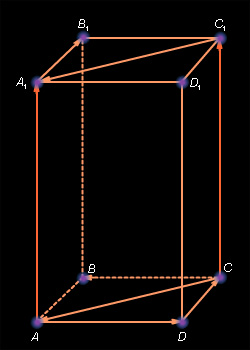


Рисунок 9.1.2.

На рисунке 9.1.2 

**Определение 9.4.**

Если два ненулевых вектора  и  **коллинеарны,** а лучи AB и CD **сонаправлены**, то векторы  и  называются **сонаправленными**. Этот факт обозначается так:  Если же эти лучи **не являются сонаправленными**, то векторы  и  называются **противонаправленными.** Этот факт обозначается так: 

**Определение 9.5.**

**Два вектора называются равными, если они сонаправлены и их длины равны.**

**На рисунке 9.1.2** так как  и  а так как 

Нетрудно доказать следующее.

**Теорема 9.1.**

**От любой точки пространства можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.**

Сделайте это самостоятельно.

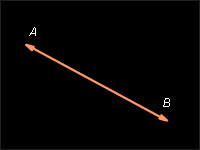


Рисунок 9.1.3

**Определение 9.6.**

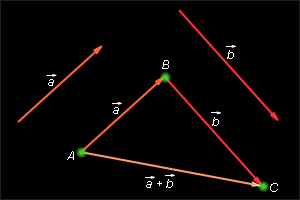
Два вектора называются противоположными, если их длины равны, и они противоположно направлены (рис. 9.1.3).

**Рисунок 9.1.3.**

** и – противоположные векторы.**

**Определение 9.7.**

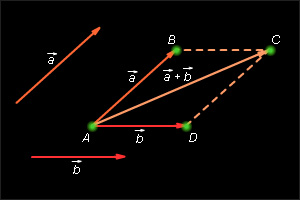
**Суммой двух векторов  и называется новый вектор который обозначается  и получается следующим образом.**



**Рисунок 9.1.4.**

Отложим от произвольной точки A вектор , равный  Теперь от точки B отложим вектор  равный  Вектор  и называется суммой векторов  и  **Это правило сложения векторов называется правилом треугольника.**

Для сложения двух неколлинеарных векторов можно воспользоваться **правилом параллелограмма**, известным из курса планиметрии (рис. 9.1.5).



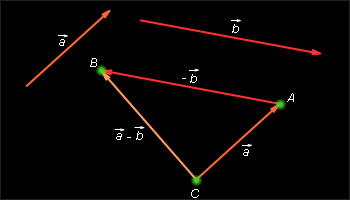
**Рисунок 9.1.5**.

Для любых векторов   и  справедливы равенства:

*  (переместительный закон);
*  (сочетательный закон).

**Определение 9.8.**

Разностью векторов  и  называется такой вектор  сумма которого с вектором  равна вектору  Обозначается разность векторов так:  где  – вектор, противоположный вектору  (рис. 9.1.6).



**Рисунок 9.1.6.**

**Теорема 9.2.**

**Сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они складываются.**

Доказательство этого утверждения следует из закона сложения векторов.

**Определение 9.9.**

Произведением ненулевого вектора  на число k называется вектор  длина которого равна  причем при k > 0 векторы  и  **сонаправлены**, а при k < 0 – **противонаправлены**. Произведением любого числа на нулевой вектор является по определению нулевой вектор.

Из этого определения следует, что векторы  и  коллинеарны. Кроме того, произведение любого вектора на число 0 есть нулевой вектор.

Для любых векторов   и любых чисел k и l справедливы равенства:

*  (сочетательный закон);
*  (первый распределительный закон);
*  (второй распределительный закон).

**Теорема 9.3.** Признак коллинеарности векторов.

**Для коллинеарности вектора  ненулевому вектору  необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число λ, что **

Эта теорема доказывается аналогично, как в планиметрии.

**Следствие 9.3.1.**

**Для того, чтобы точка C лежала на прямой AB, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число λ, что **

**Следствие 9.3.2.**

**Для параллельности прямых AM и BN необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число λ, что **

**Зачет по теме: «Векторы в пространстве».**

**1.Что называется направленным отрезком? Начало, конец, длина направленного отрезка?**

**2.Какие направленные отрезки называются коллинеарными?**

**3.Какие направленные отрезки называются одинаково направленными, противоположно направленными?**

**4.Какие направленные отрезки называются равными?**

**5.Какие направленные отрезки называются противоположными?**

**6.Сформулируйте свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности равенства направленных отрезков.**

**7.Что называется вектором? Их обозначение.**

**8.Что называют длиной или модулем ненулевого вектора?**

**9.Что называют направлением ненулевого вектора?**

**10.Какой вектор называют единичным?**

**11.Какой вектор называют нулевым?**

**12.Какие векторы называют одинаково направленными, противоположно направленными?**

**13.Какие векторы называются коллинеарными?**

**14.Какие два вектора называются равными?**

**15.Какие векторы называются противоположными?**

**16.Что называется суммой двух векторов?**

**17.Правило треугольника.**

**18.Правило параллелограмма.**

**19.Свойства сложения векторов (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность, свойство нуль-вектора, существование и единственность противоположного вектора).**

**20.Правило многоугольника.**

**21.Правило параллелепипеда.**

**22.Что называется разностью двух векторов?**

**23.Правило треугольника.**

**24.Что называется произведением вектора на число?**

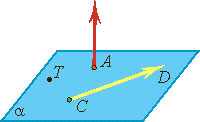
**25.Свойства умножения вектора на число (ассоциативность, дистрибутивность умножения по отношению к сложению чисел, дистрибутивность умножения по отношению к сложению векторов).**

**26.Сформулировать признак коллинеарности двух ненулевых векторов.**

**27.В чем состоит геометрический смысл коллинеарности двух ненулевых векторов?**

**Понятие вектора**

**Величины, которые характеризуются, не только числом, но еще и направлением, называются векторными величинами или просто векторами. Векторами являются, например, скорость, ускорение, сила.**

****

**Векторы:**

****

**Геометрически векторы изображаются направленными отрезками.**

***Направленный отрезок называется вектором.***

**Вектор характеризуется следующими элементами:**

**1) начальной точкой (точкой приложения);**

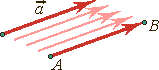
**2 )направлением;**

**3) длиной («модулем вектора»).**

**Если начало вектора — точка А, а его конец — точка В, то вектор обозначается или .**

****

**От любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один, используя параллельный перенос.**

****

***Нулевой вектор* — точка в пространстве. Начало и конец нулевого вектора совпадают, и он не имеет длины и направления.**

**Обозначается: .**

***Абсолютной величиной (или модулем)* вектора называется длина отрезка, изображающего вектор. Абсолютная величина вектора .**

**Обозначается .**

**Два вектора называются *равными*, если они совмещаются параллельным переносом.**

**АВСD — параллелограмм, **

****

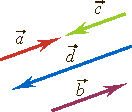
**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

* **Два ненулевых вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.**
* **Если векторы** **и** **коллинеарны и их лучи сонаправлены, то векторы** **и** **называются *сонаправленными.***

**Обозначаются .**

* **Если векторы** **и**  **коллинеарны, а их лучи не являются сонаправленными, то векторы** **и** **называются *противоположно направленными.***

**Обозначаются . Нулевой вектор условились считать сонаправленным с любым вектором.**

****

**коллинеарные векторы:**

****

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

***Свойство коллинеарных векторов:***

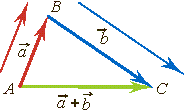
* **Если векторы**  **и** **коллинеарны и** **, то существует число k такое, что** **, причем если k > 0, то векторы** **и** **сонаправленные, если k < 0, то противоположно направленные.**

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

***Правило треугольника***

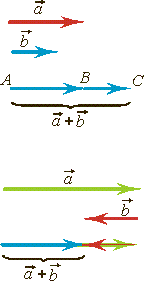
**Каковы бы ни были точки А, В, С, имеет место векторное равенство:**

****

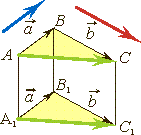
****

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

**Рисунки иллюстрируют сложение коллинеарных векторов с помощью параллельного переноса.**

****

**Если при сложении векторов  и по правилу треугольника точку А заменить другой точкой А1, то вектор  заменится равным ему вектором.**

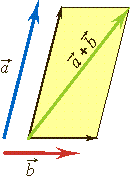
****

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

***Правило параллелограмма***

**Если векторы и  неколлинеарны, их можно отложить от одной точки, достроив затем параллелограмм.**

**Диагональ параллелограмма есть сумма двух векторов  и .**

****

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

***Свойства сложения векторов***

**Для любых векторов  заданных в пространстве, справедливы равенства:**

1.  **- Переместительный закон**

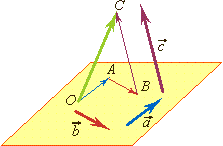
1.  **- Сочетательный закон**

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

***Правило многоугольника* применяется, если нужно найти сумму трех или большего числа векторов.**

**Сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они складываются.**

**От произвольной точки О отложен вектор затем от точки А отложен вектор  и, наконец, от точки В отложен вектор В результате получается вектор **

****

***Умножение вектора на число***

**Произведением ненулевого вектора  на число k называется такой вектор, длина которого равна,  , причем векторы и сонаправлены при и противоположно направлены при k < 0.**

**Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.**

****

****

**Векторы  и k коллинеарны.**

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

***Свойства умножения вектора на число***

**Для любых векторов** **и**  **и любых чисел k, m справедливы равенства:**

*  **-Сочетательный закон**
*  **-Первый распределительный закон**
*  **-Второй распределительный закон**

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

***Компланарные векторы***

* **Векторы называются *компланарными*, если при откладывании их от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости.**

**1.Любые два вектора компланарны.**

**2.Три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, также компланарны.**

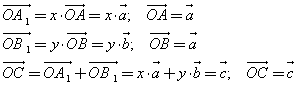
**3. Три произвольных вектора могут быть компланарными (лежать в одной плоскости) или некомпланарными (не лежать в одной плоскости).**

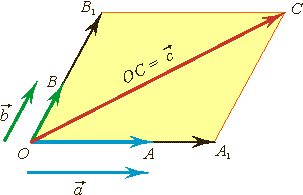
***Признак компланарности трех векторов***

**Если вектор можно разложить по векторам  и , т.е. представить в виде:**

**,**

**где х и у — некоторые числа, то векторы, и компланарны.**

****

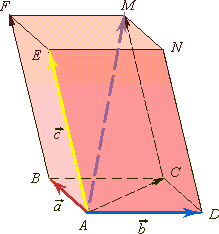
****

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

***Правило параллелепипеда***

**Сумма трех некомпланарных векторов равна вектору, изображаемому направленной диагональю параллелепипеда, построенному на этих векторах.**

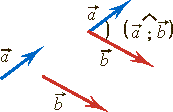
****

****

***Угол между двумя векторами***

**Углом между двумя направлениями в пространстве называется величина наименьшего угла между любыми лучами этих направлений с общим началом.**

**Угол между лучами  обозначается . По определению угол между двумя направлениями находится в промежутке [0°; 180°].**

****

**Углом между двумя ненулевыми векторами называется угол между направлениями этих векторов.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Перпендикулярные векторы (или ортогональные)** | **Коллинеарные векторы** | |
| **Сонаправленные** | **Противоположно направленные** |
|  |  |  |
| **90°** | **0°** | **180°** |

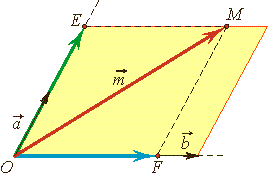
**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

***Базис вектора. Разложение вектора на плоскости по двум некомпланарным векторам***

**Теорема: Любой вектор на плоскости может быть представлен, и притом единственным образом, в виде двух любых неколлинеарных векторов  и :**

****

**Числа x и y называются координатами вектора. Векторы  и  называются базисом вектора на плоскости.**

****

***Разложение вектора по трем некомпланарным векторам***

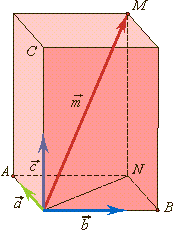
* ***Базисом пространства* называют любые три некомпланарных вектора, взятые в определенном порядке.**

***Теорема:* Любой вектор на плоскости может быть представлен, и притом единственным образом, в виде линейной комбинации трех любых неколлинеарных векторов,  и :**

****

**Числа x, y и z называются координатами вектора  в данном базисе. В этом случае пишут:**

****

****

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

**Действия над векторами, заданными своими координатами**

****

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Сложение** | **Вычитание** | **Умножение** |
| **При сложении векторов их соответстветственные координаты**  **складываются.** | **При вычитании векторов их соответстветственные координаты**  **вычитаются.** | **При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число** |

**\**