СМОЛЕНСКАЯ АКАДЕМИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Чернышева Л. В.

Иваненкова М. А.

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

по математике

(часть 1)

СМОЛЕНСК 2016

Рассмотрено и утверждено на заседании кафедры ИТ

Иваненкова М. А.

Чернышева Л. В.

Рабочая тетрадь по математике

(часть 1)

Рецензент: Емельченков Е. П.

Данная рабочая тетрадь по математике предназначена для студентов 1 курса различных специальностей.

Рабочая тетрадь содержит краткие теоретические сведения, примеры решения типовых задач, упражнения для самостоятельного решения (среди которых задания репродуктивного, частично-поискового и творческого уровня).

СОДЕРЖАНИЕ

<u>РАЗДЕЛ 1.</u> ФУНКЦИИ, ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ.

§ 1. Числовая функция. Основные понятия.

<u>Понятие функции</u>. Функция – это одно из основных математических и общенаучных понятий, выражающее зависимость между переменными величинами.

Функция - ____

____

При этом используют запись ____.

Переменную x называют _______________ переменной или _____________________,

а переменную y – ____.

Значение y, соответствующее заданному значению x, называют ___________________.

Область определения функции (обозначение –__________) - ____________________

____;

Множество значений функции (обозначение –_____) - _________________________

____.

Функция f(x) называется *числовой*, если ее область определения D(f) и множество значений E(f) содержатся во множестве действительных чисел R.

В дальнейшем будем изучать лишь числовые функции.

Чаще всего функцию задают с помощью какой-либо формулы. При этом если область определения функции не указана, то считают, что область определения состоит из всех значений независимой переменной, при которых эта формула имеет смысл.

Например, область определения функции, заданной формулой $f(x)=\dfrac{2}{x+7}$, состоит из всех чисел, кроме числа –7 (D(f)=(- ∞; -7)U(-7; +∞)).

<u>Способы задания функций.</u> Функции могут быть заданы различными способами. Отметим некоторые из них.

1. *Аналитический способ.*____

____

Например, ____

2. *Табличный способ*. ____

____.

Например, широко известны таблица квадратов, таблица обратных чисел и т. д.

3. *Графический способ* представления функции – самый наглядный. График функции – это линия, дающая цельное представление о характере изменения функции по мере изменения ее аргумента.

Графиком функции y=f(x) называется ____

____

Линия, изображенная на рис. 1, не может быть графиком функции, а линия, изображенная на рис. 2, есть график некоторой функции.

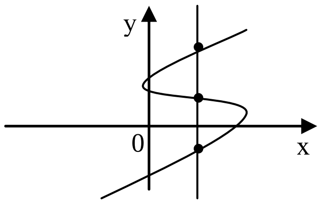


Рис. 1

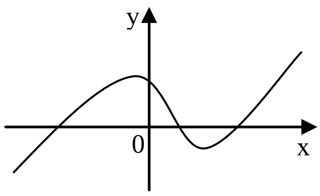


Рис. 2

Почему?____

Благодаря своей наглядности графический способ задания функции часто сопутствует другим способам. Выведя формулу какой-либо функциональной зависимости, исследователь вслед за этим строит еще и ее график. Многие приборы выдают показания именно в виде графиков. Например, барограф вычерчивает график атмосферного давления как функции времени, кардиограмму можно назвать графиком работы сердца.

Упражнения для самостоятельного решения.

№1. Формула $y = -5x + 6$ задает некоторую функцию. Найдите значение функции, соответствующее значению аргумента, равному -1,2; 2,8. При каком значении аргумента значение функции равно 6; 8; 100.

№2. Запишите значения функции:

а) $f(x) = x^2 + 2x$ в точках x_0, $t + 1$;

б) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 1$ в точках x_0, $a - 2$.

№3. Найдите область определения каждой из функций:

а) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$; б) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$; в) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - 4x + 3}$; г) $f(x) = \sqrt{36 - x^2}$;

д) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$; е) $\dfrac{1}{x^2(1-x)}$; ж) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+8)(x-3)^2}$; з) $f(x) = \dfrac{1+x^2}{\sqrt{4-x}}$;

и) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3+x}}{x^2 + 4x - 5}$.

№4. Найдите область определения и область значений функции:

а) $y = \dfrac{3}{x+1} - 1$; б) $y = 2 + \dfrac{4}{x-3}$.

§ 2. Основные характеристики функций.

Монотонные функции.

Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* на данном числовом промежутке X, если

____

____

Функция $y=f(x)$ называется *убывающей* на данном числовом промежутке X, если

____

____

Функция, только возрастающая или только убывающая на данном числовом промежутке, называется __________________ на этом промежутке.

Пример 1. Доказать, что функция, заданная формулой $f(x)=3x^2$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.

Р е ш е н и е. Пусть $x_2>x_1\geq 0$. Тогда оценим разность $f(x_2)-f(x_1)=3x_2^2-3x_1^2=3(x_2^2-x_1^2)=3(x_2-x_1)(x_2+x_1)>0$.

Итак из неравенства $x_2>x_1\geq 0$ следует неравенство $f(x_2)>f(x_1)$, т. е. большему значению аргумента из промежутка $[0; +\infty)$ соответствует большее значение функции. Следовательно, функция $f(x)=3x^2$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.

О монотонности функции можно судить по ее графику. Например, функция, график которой представлен на рис. 3, ____. Функция, график которой изображен на рис. 4, убывает на промежутке _________ и возрастает на промежутке ____.

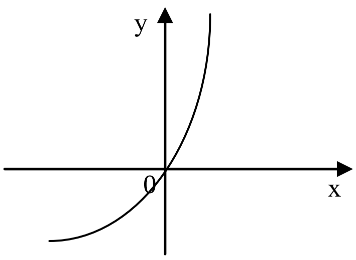


Рис. 3

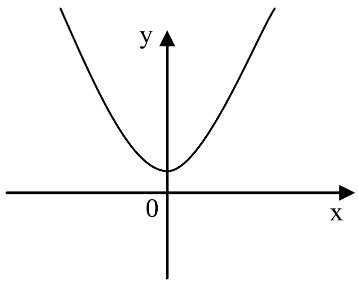


Рис. 4

Точки максимума и минимума (точки экстремума).

Рассмотрите график на рис. 5.

Чем «замечательны» точки А, В и С графика функции?

Вывод______________________________

____

____

____

____

____

____

____

____

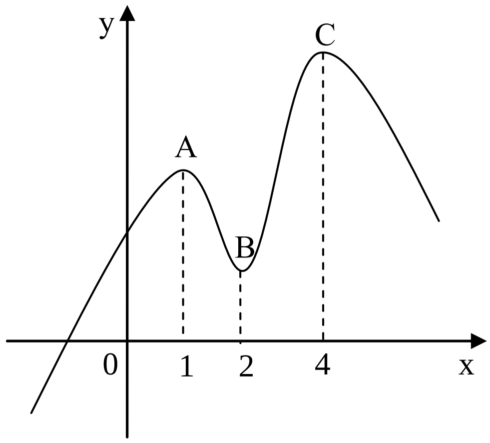


Рис. 5

Четные и нечетные функции.

Функция y=f(x) называется *четной*, если она обладает следующими двумя свойствами:

1) ____

____

____

2) ____

____

____

Функция y=f(x) называется *нечетной*, если она обладает следующими двумя свойствами:

1) ____

____

____

2) ____

____

____

Пример 2. Исследовать на четность функции:

а) $y=x^{20}$; б) $y=x^{13}$; в) $y=\frac{x-4}{x^2-9}$; г) $y=\frac{x^3-8}{x+5}$.

Р е ш е н и е. а) Область определения функции D(y)=R симметрична относительно нуля. Найдем f(-x):

$$f(-x)=(-x)^{20}=x^{20}=f(x)$$

Значит, для всех x выполняется неравенство f(-x)=f(x). Функция является четной.

б) Область определения функции D(y)=R симметрична относительно нуля. Найдем f(-x):

$$f(-x)=(-x)^{13}=-x^{13}=-f(x)$$

Значит, для всех x выполняется неравенство f(-x)=-f(x). Функция является нечетной.

в) Область определения функции $D(y)=(-\infty;-3)\cup(-3;3)\cup(3;+\infty)$ симметрична относительно нуля. Найдем f(-x):

$$f(-x)=\frac{-x-4}{(-x)^2-9}=-\frac{x+4}{x^2-9}$$

Так как $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной (такие функции называют функциями *общего вида)*.

г) Область определения функции $D(y)=(-\infty;-5)\cup(-5;+\infty)$ не является симметричной относительно нуля, поэтому функцию исследовать на четность, нечетность нельзя.

Графики четной и нечетной функции обладают следующими особенностями:

1) *Если функция является четной, то ее график* ________________________

____ (рис. 6).

2) *Если функция является нечетной, то ее график* _____________________

____(рис. 7).

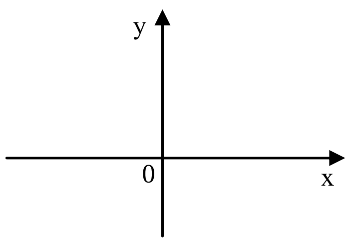


Рис. 6

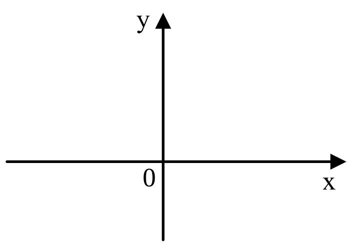


Рис. 7

<u>**Промежутки знакопостоянства и нули функции.**</u>

Промежутками знакопостоянства функции - ___________________________________

____.

О промежутках знакопостоянства функции легко судить по ее графику. Рассмотрим, например, функцию y=x (рис. 8)

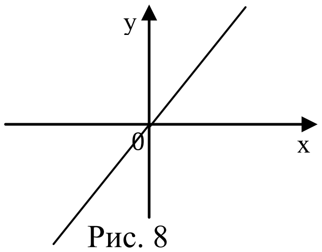


Рис. 8

Вывод ____
____
____
____

Нули функции - ____
____

Графически нули функции - ___________________
____
____

На рис. 9 нулями функции являются точки
_______________________________________.

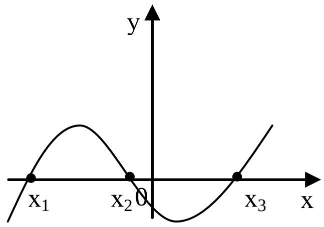


Рис. 9

Процесс определения основных характеристик функции по ее графику называется
____.

Упражнения для самостоятельного решения.

№5. Докажите, что функция, заданная формулой $f(x)=3x^2$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$.

№6. Докажите, что функция $y = kx + b$

а) возрастает на множестве R при $k > 0$;

б) убывает на множестве R при $k < 0$.

Установите четность или нечетность функций (7 – 9)

№7. а) $y = -2x^2$; б) $y = x^7 - 2x^3$.

№8. а) $y = (x - 3)^2 - (x + 3)^2$; б) $y=\sqrt{9-x^2}$; в) $y = 0{,}5x^3 - 5x^2$.

№9. а) $y=\dfrac{x}{x^2-4}$; б) $y=\dfrac{x-3}{x+1}$; в) $y=\dfrac{x-x^3}{1+x^2}$.

№10. Для функций, графики которых изображены на рис. 10, а - е, найдите:

а) f(3); f(-1); f(5);

б) те значения x, при которых значение функции равно 1;

в) область определения функции;

г) множество значений функции;

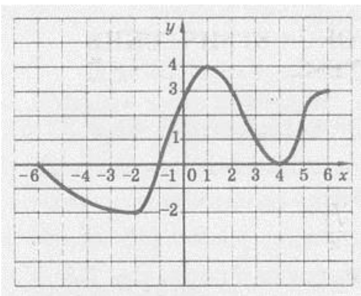
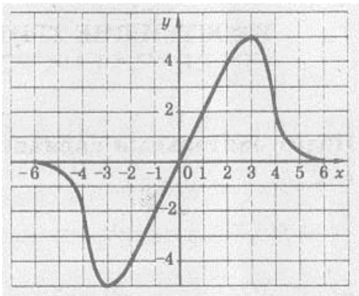
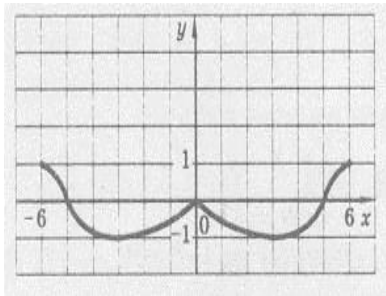
д) нули функции;

е) промежутки знакопостоянства;

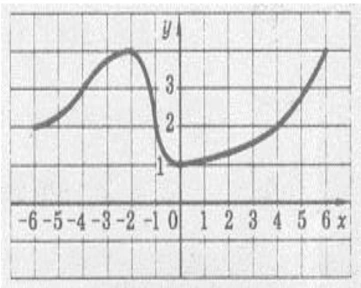
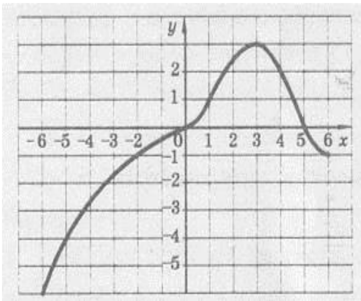
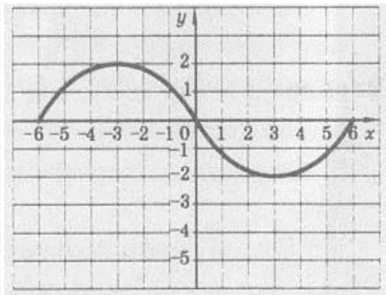
ж) промежутки монотонности;

д) точки экстремума, вид экстремума;

з) является ли функция четной, нечетной.

а) б) в) Рис. 10

г) д) е)

Начертите эскиз графика функции f (11 – 13):

№11. а) f возрастает на промежутке (-∞; 2] и убывает на промежутке [2; +∞);

б) f убывает на промежутках (-∞; -1] и [4; +∞), возрастает на промежутке [1; 4].

№12. а) $x_{max} = -3$, $x_{min} = 4$, f(-3) = 5, f(4) = -5;

б) , $x_{min} = -2$, $x_{min} = 2$, $x_{max} = 0$, f(-2) = f(2) = -3, f(0) = 2.

№13. а) f – четная функция, $x_{max} = -3$, , $x_{min} = 0$, f(-3) = 4, f(0) = 0;

б) f – нечетная функция, $x_{max} = 2$, , $x_{min} = 5$, f(2) = 3, f(5) = -4.

§ 3. Простейшие преобразования графиков функций.

Если известен график функции y=f(x), то с помощью некоторых преобразований плоскости (параллельного переноса, осевой и центральной симметрии и т. д.) можно построить графики более сложных функций.

1.График функции f(kx) получается сжатием графика f(x) в k раз вдоль оси Ox при k>1 или растяжением в $\frac{1}{k}$ раз вдоль этой оси при 0<k<1 (рис. 11)

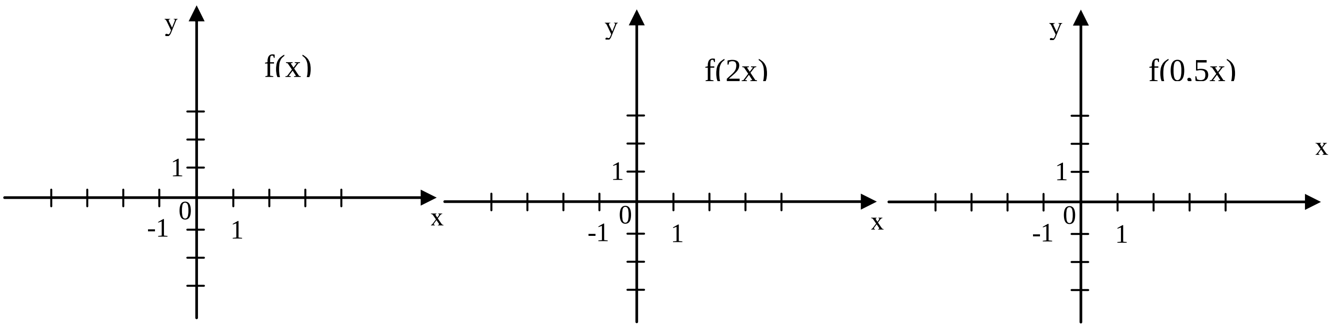


Рис. 11

2.График функции f(x+c) получается параллельным переносом графика f(x) в отрицательном направлении оси Ox на $|c|$ при c>0 и в положительном направлении на $|c|$ при c<0 (рис. 12)

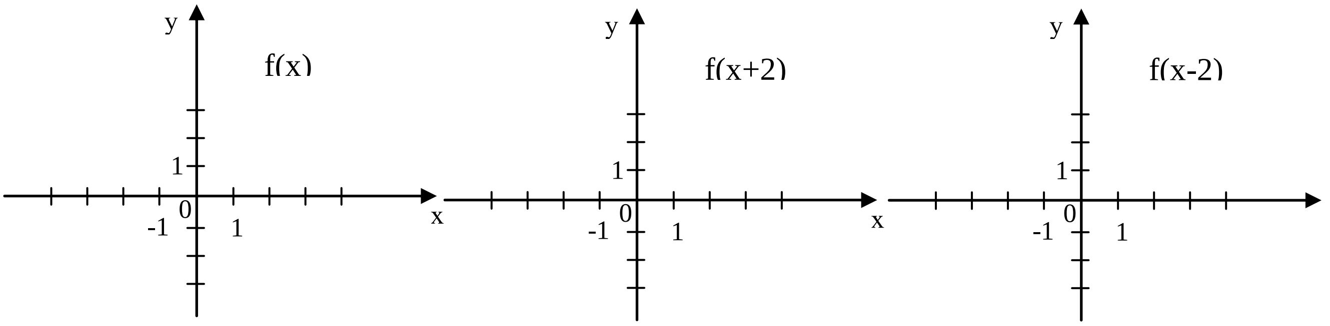


Рис. 12

3.График функции kf(x) получается растяжением графика f(x) вдоль оси Oy в k раз при k>1 или сжатием в $\frac{1}{k}$ раз вдоль этой оси при 0<k<1 (рис 13)

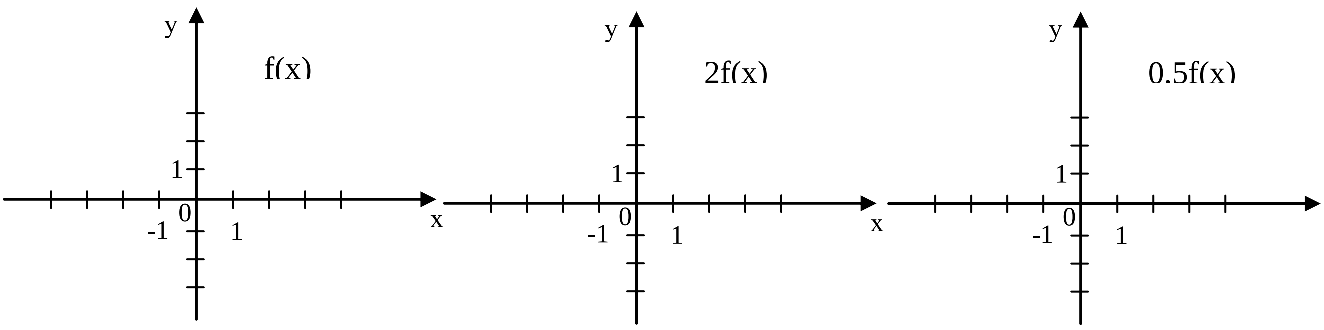


Рис. 13

4.График функции f(x)+c получается параллельным переносом графика f(x) в положительном направлении оси Oy на │c│при c>0 и в отрицательном направлении этой оси на│c│при c<0 (рис. 14)

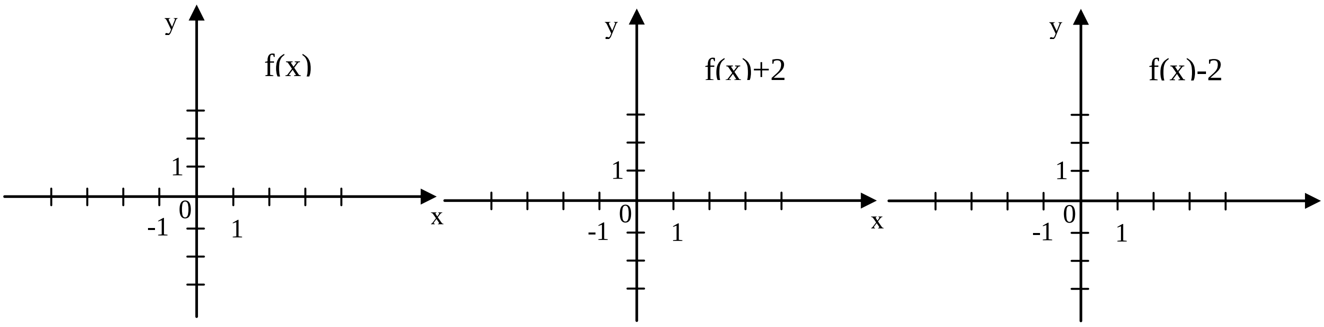


Рис. 14

5.График функции y=f(-x) получается симметричным отображением графика f(x) относительно оси Oy (рис. 15).

6.График функции y= - f(x) получается симметричным отображением графика f(x) относительно оси Ox (рис. 16).

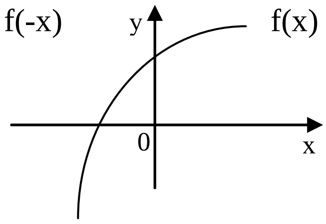


Рис. 15

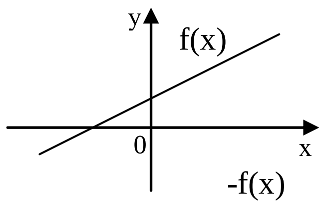


Рис. 16

7.График функции y=│f(x)│получается из графика функции y=f(x) следующим образом: часть графика y=f(x), лежащая над осью Ox, сохраняется, часть его, лежащая под осью Ox, отображается симметрично относительно оси Ox (рис. 17).

8.График функции y=f(│x│) получается из графика функции y=f(x)следующим образом: при x≥0 график y=f(x) сохраняется, а при x<0 полученная часть графика отображается симметрично относительно оси Oy (рис. 18).

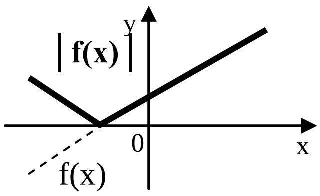


Рис. 17

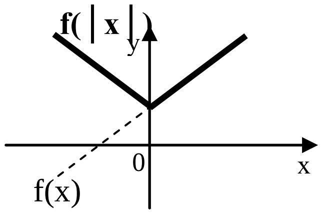


Рис. 18

Замечание. Если необходимо построить график функции, содержащий знак модуля, можно воспользоваться определением модуля.

Пример. Построить графики следующих функций:

а) $y=\dfrac{2}{x+3}$; б) $y=2x^2-8x-1$; в) $y=\left|\dfrac{2x-3}{x-2}\right|$; г) $y=x^2-2\,|\,x\,|-3$; д) $y=3\,|x+2|\,-1$

Р е ш е н и е.

а) Согласно п.2 график функции $y=\dfrac{2}{x+3}$ получается из графика функции $y=\dfrac{2}{x}$ при помощи параллельного переноса на 3 единицы в отрицательном направлении вдоль оси Ox (рис. 19)

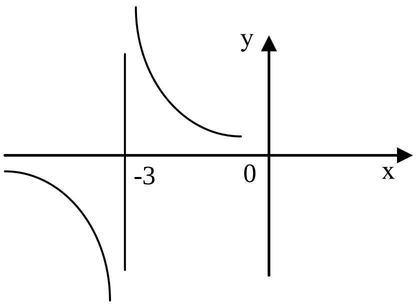


Рис. 19

б) Выделим из данного квадратного трехчлена полный квадрат:

$2x^2-8x-1=2(x^2-4x)-1=2(x^2-4x+4-4)-1=$

$2((x-2)^2-4)-1=2(x-2)^2-8-1=2(x-2)^2-9.$

График данной функции получается из графика функции $y=x^2$ при помощи следующих преобразований:

1)растяжением графика вдоль оси Oy в 2 раза;

2)параллельного переноса вдоль оси Ox на 2 единицы в положительном направлении;

3)параллельного переноса на 9 единиц в отрицательном направлении вдоль оси Oy (рис. 20).

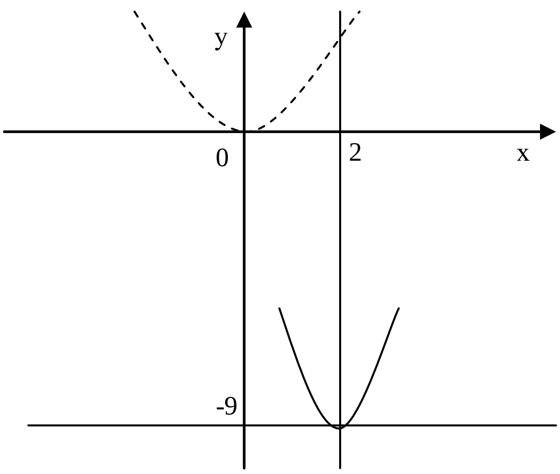


Рис. 20

в) Построим график функции $y=\left|\dfrac{2x-3}{x-2}\right|$.

Выделяя целую часть имеем:

$$y=\left|\frac{2(x-2)+4-3}{x-2}\right|=\left|\frac{2(x-2)}{x-2}+\frac{1}{x-2}\right|=\left|2+\frac{1}{x-2}\right|$$

Следовательно, сначала необходимо построить график функции $y=\dfrac{1}{x}$ и произвести следующие преобразования:

1)переместить вправо на 2 единицы вдоль оси Ox;

2)переместить вверх на 2 единицы вдоль оси Oy;

3)часть графика, оказавшуюся в нижней полуплоскости, отобразить в верхнюю полуплоскость (рис. 21).

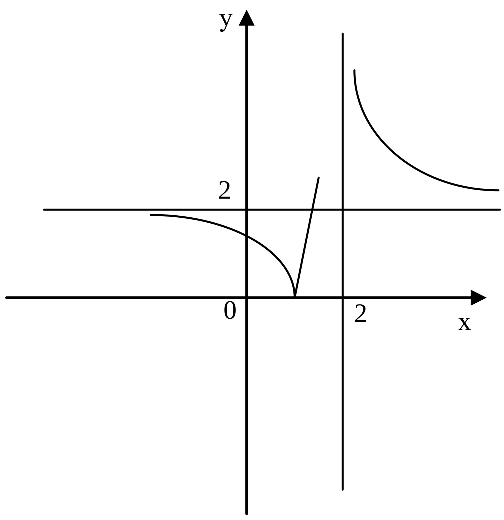


Рис. 21

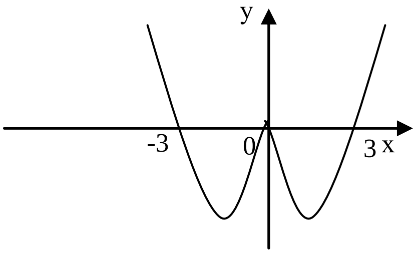


Рис. 22

г)Запишем исходную функцию в виде $y=|x|^2-2|x|-3$. Тогда график данной функции получается из графика функции $y=x^2-2x-3$ при помощи симметричного отображения относительно оси Оу части графика при $x \geq 0$ (рис. 22).

д)Для построения графика данной функции используем определение модуля:

1) $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ y = 3(x+2)-1 \end{cases}$; $\begin{cases} x \geq -2 \\ y = 3x+5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+2 \leq 0 \\ y = -3(x+2)-1 \end{cases}$; $\begin{cases} x \leq -2 \\ y = -3x-7 \end{cases}$

Следовательно, при $x \geq -2$ необходимо построить график функции $y=3x+5$, а при $x \leq -2$ – график функции $y=-3x-7$ (рис. 23).

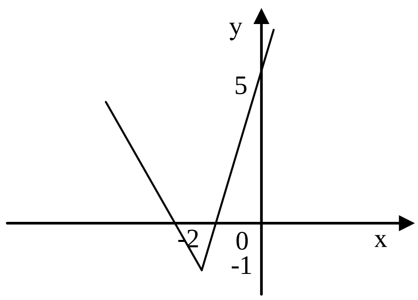


Рис. 23

Упражнения для самостоятельного решения.

№14. В одной и той же системе координат постройте графики следующих функций:

а) $y = \frac{1}{x}, y = \frac{1}{x} + 2, y = \frac{1}{x-2}$;

б) $y = -x^2, y = 4 - x^2, y = -(x-2)^2$.

№15. Постройте графики функций:

а) $y = (3x-2)^2$; б) $y = 2 + \frac{3}{x-4}$; в) $y = \frac{1}{2}x^3 + 3$; г) $y = \sqrt{x+1} - 1$; д) $y = 2(x+4)^2 - 5$.

№16. Используя преобразования, постройте графики следующих функций:

а) $y = 4x^2 - 6x + 8$; б) $y = \frac{4x+1}{2x-3}$; в) $y = \left|-x^2 - 2x\right|$; г) $y = \frac{2-|x|}{3-|x|}$.

№17*.Постройте графики функций:

а) $y = 2x|x| - 3x + 4$; б) $y = \frac{1}{|x-2|}$.

РАЗДЕЛ 2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ.

§ 1. Тригонометрические функции числового аргумента.

Градусное и радианное измерение углов.

Градус – величина центрального угла, стягиваемого дугой, равной $\frac{1}{360}$ длины окружности (рис. 24)

Минутой называют $\frac{1}{60}$ градуса (обозначение: $'$)

Секундой называют $\frac{1}{60}$ минуты (обозначение: $''$)

Радиан – величина центрального угла, стягиваемого дугой, равной радиусу данной окружности (рис. 25).

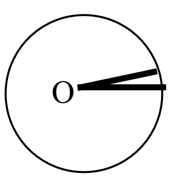


Рис. 24

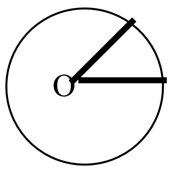


Рис. 25

Формулы перехода от радианной меры угла к градусной и наоборот имеют вид:

$$\alpha^0 = (\frac{\pi}{180}\alpha) \text{ рад}$$

$$\beta \text{ рад} = (\frac{180}{\pi}\beta)^0.$$

Пример 1.

а) выразим в радианах величину угла А, если А=150^0:

____.

б) выразим в градусах величину угла α, если α = 4,5 рад:

____.

Запишем градусную и радианную меры наиболее часто встречающихся углов:

Градусы		45^0		90^0		270^0	
Радианы	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		π		2π

Тригонометрические функции.

Рассмотрим единичную окружность, т. е. окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 1 (рис. 26). На единичной окружности отметим точку P_0 (1; 0). При повороте начального радиуса около центра O на угол α радиан точка P_0 перейдет в некоторую точку P_α. Обозначим координаты этой точки x_α и y_α. (заметим, что поворот можно осуществить как в положительном, так и в отрицательном направлении).

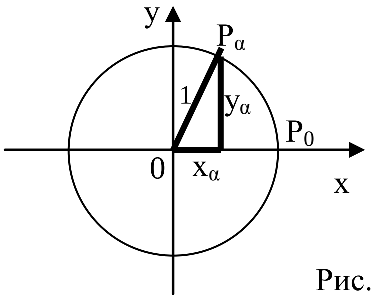


Рис. 26

Синусом угла α ____

____

____

Косинусом угла α ____

____

____

Каждому углу α соответствует единственная точка P_α (x_α; y_α) и, следовательно, единственное значение синуса и косинуса этого числа.

Вывод ____

Укажите множество значений синуса и косинуса угла ______________________

Тангенсом угла α ____

____

____

Котангенсом угла α ____

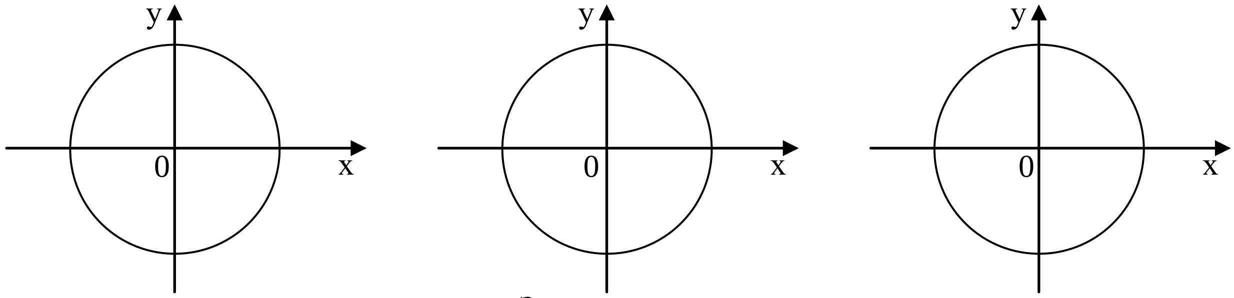
____

____

В практических вычислениях часто используются значения тригонометрических функций, приведенные в таблице:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin α								
cos α								
tg α								
ctg α								

Отметим знаки значений тригонометрических функций по четвертям:



Знаки синуса Знаки косинуса Знаки тангенса и котангенса

Важное значение имеет следующее свойство тригонометрических функций: *значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса не изменяются при прибавлении к данному углу целого числа оборотов*. Этот факт позволяет свести нахождение значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса любого угла к нахождению их значения для неотрицательного угла, меньшего 360^0. Например,

$\cos 785^0 = \cos(2\cdot 360^0 + 65^0) = \cos 65^0$.

Пример 2. Определить знак произведения $\sin 67^0 \operatorname{ctg} 267^0 \cos 375^0 \operatorname{tg}(-68^0) \sin 2$.

Р е ш е н и е. $\sin 67^0 > 0$, так как угол 67^0 является углом первой четверти, а синус в первой четверти положителен.

$\operatorname{ctg} 267^0 < 0$, так как угол 267^0 является углом третьей четверти, а котангенс в этой четверти отрицателен.

$\cos 375^0 > 0$, так как угол 375^0 является углом первой четверти ($375^0 = 360^0+15^0$), а косинус в этой четверти положителен.

$\operatorname{tg}(-68^0) < 0$, так как угол -68^0 является углом четвертой четверти, а тангенс четвертой четверти отрицателен.

$\sin 2 > 0$, так как угол величина которого 2 радиана, является углом второй четверти, а синус во второй четверти положителен.

Следовательно, исходное произведение положительно.

<u>Основные формулы тригонометрии.</u>

Из определений синуса, косинуса, тангенса и котангенса следуют *основные тригонометрические тождества:*

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1;$$

$$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \quad ctg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Пример 3 . Вычислить значения остальных трех основных тригонометрических функций, если sin α = -0,8, $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

Р е ш е н и е. Найдем значение косинуса, воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством, из которого следует, что: $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$.

Получаем: $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-0{,}64} = \pm\sqrt{0{,}36} = \pm 0{,}6$.

Выясним, какой знак надо оставить перед корнем. По условию $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, т. е. угол принадлежит III четверти, а косинус в этой четверти отрицателен. Следовательно, перед корнем надо оставить знак «минус». Итак, cos α = -0.6.

Для нахождения значений тангенса и котангенса воспользуемся формулами:

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Получим: $tg\alpha = \dfrac{-0{,}8}{-0{,}6} = \dfrac{4}{3}; ctg\alpha = \dfrac{-0{,}6}{-0{,}8} = \dfrac{3}{4}$.

Формулы, выражающие зависимость между синусами, косинусами, тангенсами и котангенсами противолежащих углов:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha;$$

$$tg(-\alpha) = -tg\,\alpha;$$

$$ctg(-\alpha) = -ctg\,\alpha.$$

Основой для вывода остальных формул являются *формулы сложения:*

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\cdot tg\beta}; \quad tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\cdot tg\beta};$$

$$ctg(\alpha+\beta) = \frac{1 - tg\alpha\cdot tg\beta}{tg\alpha + tg\beta}; \quad ctg(\alpha-\beta) = \frac{1 + tg\alpha\cdot tg\beta}{tg\alpha - tg\beta}.$$

Пример 4. Вычислить без таблиц: 1) sin 105^0; 2) tg 15^0.

Р е ш е н и е.

1) Представим 105^0 в виде суммы 60^0+45^0. Тогда

$\sin 105^0 = \sin(60^0 + 45^0) = \sin 60^0 \cos 45^0 + \cos 60^0 \sin 45^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right).$

2) Представим 15^0 в виде разности $45^0 – 30^0$. Тогда

$$\text{tg } 15^0 = \text{tg } (45^0 - 30^0) = \frac{tg45^0 - tg30^0}{1 + tg45^0 \cdot tg30^0} = 2 - \sqrt{3}.$$

Из формул сложения, полагая $\beta = \frac{\pi n}{2}$, где nϵZ, получаем *формулы приведения* для преобразования выражений вида

$$\sin(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha);\ \cos(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha);\ tg(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha);\ ctg(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha),\ n\epsilon Z.$$

Для запоминания этих формул удобно пользоваться таким *правилом:*

а) *перед приведенной функцией ставится тот знак, который имеет исходная функция, если* $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$*;*

б) *функция меняется на «кофункцию», если n нечетно; функция не меняется, если n четно.* (Кофункциями синуса, косинуса, тангенса и котангенса называются соответственно косинус, синус, котангенс и тангенс).

Например, $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$; $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$; $tg(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = ctg\alpha$ и т. п.

Пример 5. Привести к тригонометрической функции острого угла:

1) sin 474^0;

2)cos (-1560^0); 3)tg 23,7π.

Р е ш е н и е.

1) sin 474^0 = sin ($360^0 + 114^0$) = sin 114^0 = sin ($90^0 + 24^0$) = cos 24^0.

2)cos (-1560^0) = cos 1560^0 = cos ($360^0 \cdot 4 + 120^0$) =cos 120^0 = cos ($180^0 - 60^0$) = -cos 60^0 =-0,5.

3)tg 23,7π = tg (23π +0,7π) = tg (0,7π) = tg (π – 0,3π) = -tg 0,3π.

Пример 6. Упростить выражение $\frac{tg(180^0 - \alpha)\cos(180^0 - \alpha)tg(90^0 - \alpha)}{\sin(90^0 + \alpha)ctg(90^0 + \alpha)tg(90^0 + \alpha)}$.

Р е ш е н и е.

$$\frac{tg(180^0 - \alpha)\cos(180^0 - \alpha)tg(90^0 - \alpha)}{\sin(90^0 + \alpha)ctg(90^0 + \alpha)tg(90^0 + \alpha)} = \frac{(-tg\alpha)(-\cos\alpha)ctg\alpha}{\cos\alpha(-tg\alpha)(-ctg\alpha)} = 1.$$

Из формул сложения, полагая α = β, выводятся *формулы двойного аргумента:*

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;\quad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}.$$

Пример 7. Вычислить значение выражения: $\sin 75^0 \cdot \sin 15^0$.

Р е ш е н и е.

$\sin 75^0 \cdot \sin 15^0 = \sin(90^0 - 15^0) \cdot \sin 15^0 = \cos 15^0 \cdot \sin 15^0 = \dfrac{2\cos 15^0 \cdot \sin 15^0}{2} = \dfrac{\sin 30^0}{2} = \dfrac{1}{4}$.

Известны также *формулы суммы и разности синусов и косинусов:*

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2},$$

и *формулы половинного аргумента:*

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

В указанных формулах половинного аргумента знак перед радикалом зависит от того, в какой координатной четверти находится угол $\dfrac{\alpha}{2}$.

Полезно знать следующие формулы:

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};\ tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Упражнения для самостоятельного решения.

№18. Данные углы выразите в радианах:

а) 40^0, 160^0, 310^0;

б) 36^0, 317^0, 1000^0;

в) $17^015'$, $10^05''$, $35'20''$.

№19. Найдите угловую величину дуги в градусах, если ее радианная мера равна:

а) $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{5\pi}{36}$;

б) 4, -0,75π, 7π;

в) $tg\dfrac{\pi}{4}$, $\cos 0{,}5\pi$, $\sin 90^0 + \cos 0^0 - ctg\dfrac{\pi}{4}$.

№20. Найдите числовое значение выражения:

а) $\sin 0+\cos\frac{\pi}{2}+\sin^2\frac{\pi}{4}$; б) $3\sin\frac{\pi}{6}+2\cos\pi+ctg^2\frac{\pi}{6}$;

в) $6\sin\frac{\pi}{6}-2\cos 0+tg^2\frac{\pi}{3}$; г) $3tg\frac{\pi}{4}-\sin^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{6}$.

№21. Определите знак произведения:

а) sin 50^0 cos 60^0 sin 188^0 ctg 489^0;

б) sin 210^0 tg 465^0 cos 540^0 ctg 3 sin (-46^0).

№22. Могут ли синус и косинус одного и того же числа быть равными соответственно:

а) $\frac{-7}{25}$ и $\frac{24}{25}$; б) 0,4 и 0,7; в) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ и $-\frac{\sqrt{5}}{3}$; г) $\frac{-2}{\sqrt{5}}$ и $\frac{1}{\sqrt{5}}$?

№23. Могут ли тангенс и котангенс одного и того же числа быть равными соответственно:

а) $\frac{-3}{5}$ и $\frac{-5}{3}$; б) $(\sqrt{3}-2)$ и $(\sqrt{3}+2)$; в) 2,4 и $-\frac{5}{12}$; г) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{2\sqrt{5}}{5}$?

№24. Вычислите значения остальных тригонометрических функций, если известно значение:

а) $\cos\alpha=0{,}6, \frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$; б) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}, 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

в) tg α = 2, $180^0 < \alpha < 270^0$; г) ctg α = -3, $270^0 < \alpha < 360^0$.

№25. Вычислите значение выражения:

а) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}-\sin\frac{4\pi}{15}\sin\frac{\pi}{15}}{\cos 0{,}3\pi\sin 0{,}2\pi+\sin 0{,}3\pi\cos 0{,}2\pi}$; б) $\dfrac{tg\frac{2\pi}{3}-tg\frac{5\pi}{12}}{1+tg\frac{2\pi}{3}tg\frac{5\pi}{12}}$;

в) $\dfrac{tg\frac{\pi}{10}+tg\frac{3\pi}{20}}{1-tg\frac{\pi}{10}tg\frac{3\pi}{20}}$; г) $\dfrac{\sin\frac{5\pi}{18}\cos\frac{\pi}{9}-\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{18}}{\sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{7\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}}$.

№26. Преобразуйте данное выражение таким образом, чтобы аргумент соответствующей тригонометрической функции принадлежал промежутку (0; $\frac{\pi}{2}$):

а) $\sin\frac{7\pi}{8}, \cos(-\frac{5\pi}{3}), tg\,0{,}6\pi, ctg(-1{,}2\pi)$;

б) $tg\frac{6\pi}{5}, \sin(-\frac{5\pi}{9}), \cos 1{,}8\pi, ctg\,0{,}9\pi$.

№27. Найдите числовое значение выражения:

а) $\cos^2(\pi-\alpha)\ tg(\pi+\alpha)\ tg(\frac{3\pi}{2}-\alpha)+\sin(2\pi-\alpha)\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)$;

б) $\dfrac{\sin^2(\pi-t)}{1+\sin(\frac{3\pi}{2}+t)}-\cos(2\pi-t)$.

№28. Упростите выражение:

а) $\frac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$; б) $\frac{1-(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{1-2\cos^2\alpha}$; в) $\frac{2\sin\alpha\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\sin\beta}$;

г) $\frac{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha-\sin\alpha}$; д) $\frac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)}{2\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)-\sqrt{2}\sin\alpha}$; г) $ctg^2\,\alpha\,(1-\cos 2\alpha)+\cos^2\alpha$.

№29. Вычислите $\sin 2\alpha$, $\cos 2\beta$, $\cos(\alpha+\beta)$ и $\sin(\alpha-\beta)$, если:

а) $\cos\alpha=-\frac{4}{5};\sin\beta=-\frac{3}{5};\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2};\frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$;

б) $\sin\alpha=\frac{4}{5};\cos\beta=-\frac{5}{13};\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi;\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$.

№30. Найдите $\sin\frac{\alpha}{2},\cos\frac{\alpha}{2},tg\frac{\alpha}{2}$, если:

а) $\cos\alpha=-\frac{12}{13},\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

б) $\sin\alpha=\frac{3}{5},\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

№31*. Вычислите:

а) $\cos 105^0-\sin 195^0+\sin 135^0$;

б) $\sin 810^0\cos 900^0+tg\,585^0\,ctg\,1845^0+\cos 135^0\sin 405^0$;

в) $tg\,18^0\,tg\,288^0+\sin 32^0\sin 148^0+\sin 302^0\sin 122^0$.

№32*. Докажите тождества:

а) $\sin\alpha\sqrt{1+tg^2\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha\sqrt{1+tg^{-2}\alpha}}$ при $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

б) $(\sin^2 t+2\sin t\cos t-\cos^2 t)^2=1-\sin 4t$;

в) $\frac{\cos\alpha-2\sin 3\alpha-\cos 5\alpha}{\sin 5\alpha-2\sin 3\alpha-\sin\alpha}=tg3\alpha$;

г) $\sqrt{\sin^2\alpha+tg^2\alpha\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha+ctg^2\alpha\cos^2\alpha}}$ при $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

№33*. Вычислите:

а) $\left(\sin\frac{7\pi}{18}-\sin\frac{\pi}{18}\right):\cos\frac{2\pi}{9}$;

б) $\frac{\cos\frac{11\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{5\pi}{12}}$.

§ 2. Свойства и графики тригонометрических функций.

<u>Свойства функции y=sinx и ее график.</u>

Числовая функция, заданная формулой y = sin x называется *синусом*.

Свойства:

График (рис. 27)

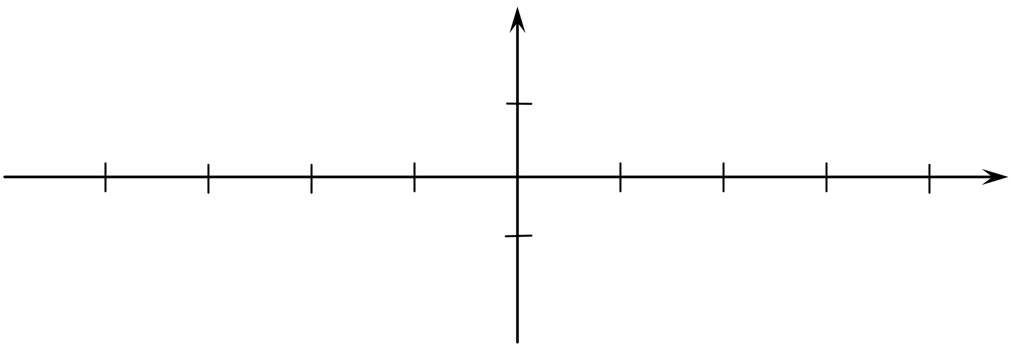


Рис. 27

Свойства функции y=cosx и ее график.

Числовая функция, заданная формулой y = cos x называется *косинусом.*

График (рис. 28)

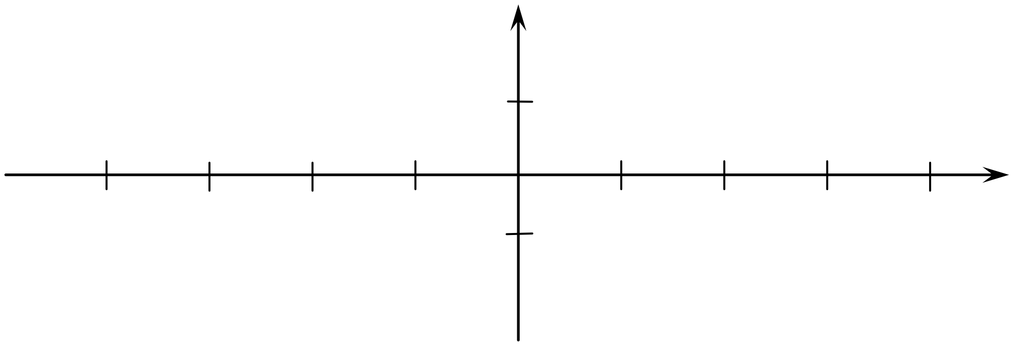


Рис. 28

Свойства:

<u>Свойства функции y=tgx и ее график.</u>

Свойства:

График (рис. 29)

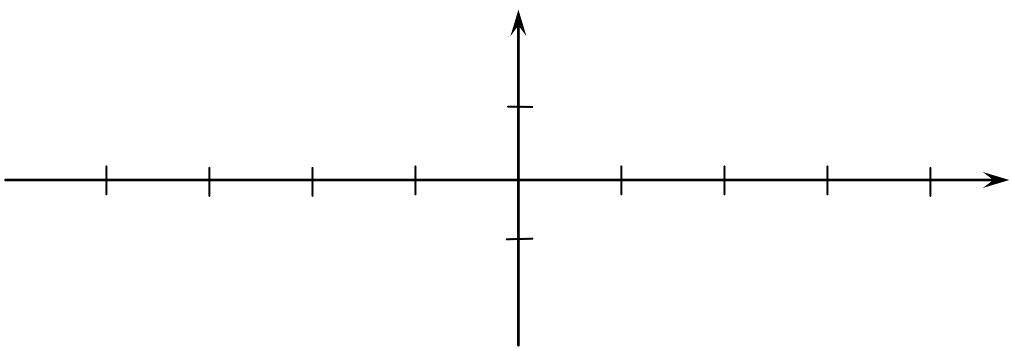


Рис. 29

Свойства функции y=ctgx и ее график.

График (рис. 30)

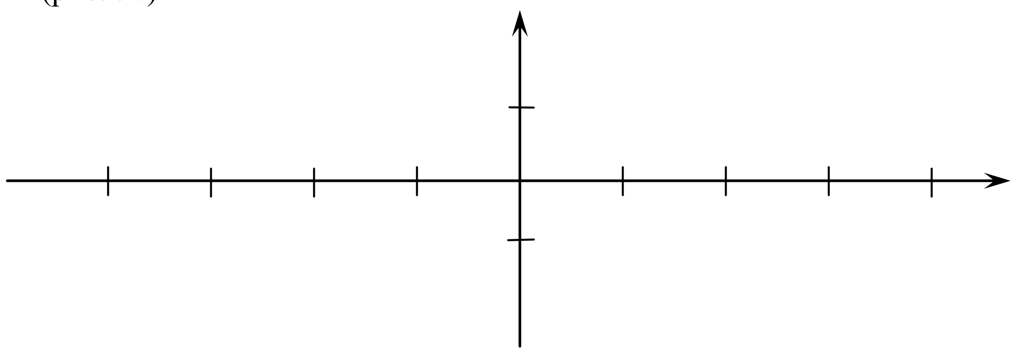


Рис. 30

Свойства:

___

___

___

___

___

___

___

___

___

___

___

Обратные тригонометрические функции.

Теорема. Пусть функция f возрастает (или убывает) на некотором промежутке, а число a – любое из значений, принимаемых функцией на этом промежутке. Тогда уравнение f(x) = a имеет единственный корень на данном промежутке.

Известно, что функция sin x возрастает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ и принимает значения от -1 до 1. Таким образом (по теореме), для любого числа a, такого, что $-1 \le a \le 1$, на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ существует единственный корень уравнения sin x = a. Этот корень называют арксинусом числа a и обозначают arcsin a.

Итак, *арксинусом числа а* называется такое число α из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен а.

Математическая запись данного предложения такова:

arcsin а = α, если sin α = а, где $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; а∈ [-1; 1].

Рассмотрим функцию **y = arcsin x.**

Перечислим некоторые ее свойства:

1.D(y) = [-1; 1].

2.E(y) = $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

3.Функция нечетная.

4.Функция возрастает на всей области определения.

5.График функции y = arcsin x изображен на рис. 31.

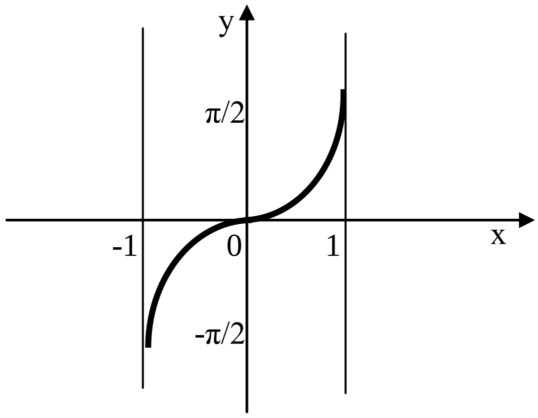


Рис. 31

Функция y = arcsin x является нечётной, справедлива формула

arcsin(- x)= - arcsin x

Аналогично введем понятие арккосинуса, арктангенса и арккотангенса.

Арккосинусом числа а называется такое число α из отрезка [0; π], что его косинус равен а.

Математическая запись данного предложения такова:

arccos а = α, если cos α = а, где α ∈ [0; π] ; а∈ [-1; 1].

Рассмотрим функцию **y = arccos x.**

Перечислим некоторые ее свойства:

1.D(y) = [-1; 1].

2.E(y) = [0; π].

3.Функция не является ни четной, ни нечетной.

4.Функция убывает на всей области определения.

5.График функции y = arccos x изображен на рис. 32.

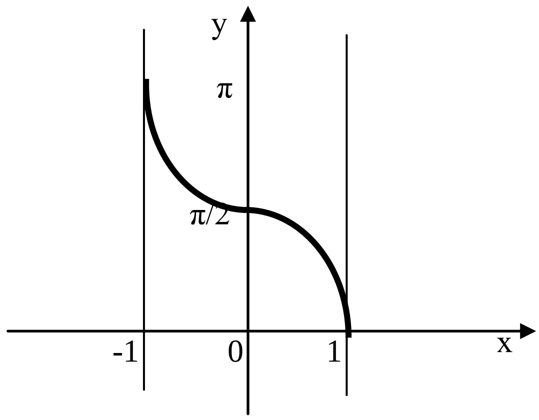


Рис. 32

Имеет место следующее тождество:

arccos (-x)= π - arccos x

Арктангенсом числа а называется такое число α из интервала $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, что его тангенс равен а.

Математическая запись данного предложения такова:

arctg a = α, если tg α = a, где $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$; $a \in R$.

Рассмотрим функцию **y = arctg x.**

Перечислим некоторые ее свойства:

1.D(y) = R.

2.E(y) = $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

3.Функция является нечетной.

4.Функция возрастает на всей области определения.

5.График функции y = arctg x изображен на рис. 33.

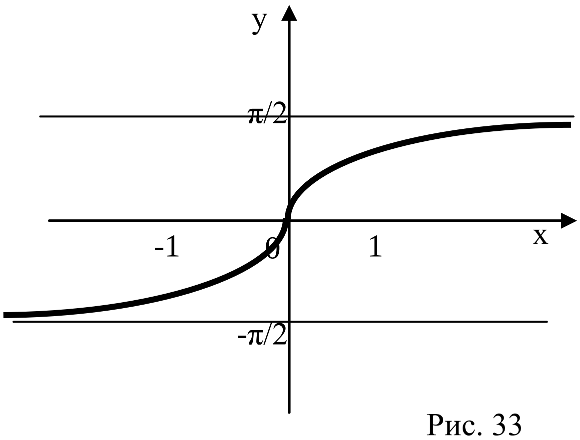


Рис. 33

Функция y = arctg x является нечётной, справедлива формула

arctg(- x)= - arctg x

Арккотангенсом числа а называется такое число α из интервала (0; π), что его котангенс равен а.

Математическая запись данного предложения такова:

arcctg a = α, если ctg α = a, где $\alpha \in (0; \pi)$; $a \in R$.

Рассмотрим функцию **y = arcctg x.**

Перечислим некоторые ее свойства:

1.D(y) = R.

2.E(y) =(0; π).

3.Функция не является ни четной, ни нечетной.

4.Функция убывает на всей области определения.

5.График функции y = arcctg x изображен на рис. 34.

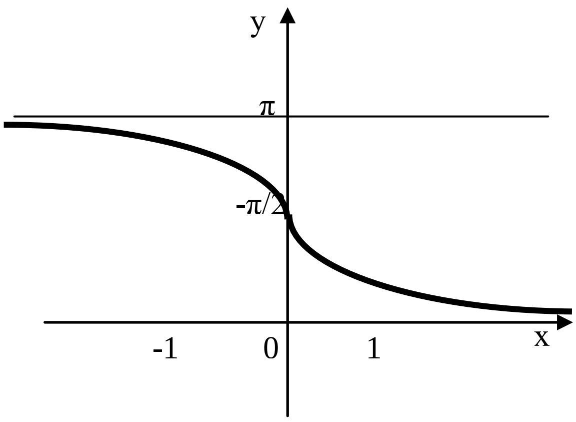


Рис. 34

Имеет место следующее тождество:

arcctg(- x)= π - arcctg x

Функции арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс называют *обратными тригонометрическими функциями.*

Упражнения для самостоятельного решения.

№34. Постройте графики следующих функций, используя преобразования:

а) y = cos x – 3; б) y = sin (x + $\frac{\pi}{3}$); в) y = tg 2x; г) y = 3 cos x.

№35. Постройте графики функций:

а) y = -3 tg 2x; б) y = 4 sin $\frac{x}{2}$;

в) y = 1 - $\frac{1}{2}\cos 2x$; г) y = $\frac{1}{3}$ctg (2x - 120^0).

№36*. Постройте графики тригонометрических функций, содержащих знак модуля:

а) y = $|\sin x|$; б) y = cos $|x|$; в) y = $|tg|x||$; г) y = $|ctg(x-45^0)|$; д) y = 2 – sin $\left|x+\frac{\pi}{3}\right|$.

§ 3. Тригонометрические уравнения и неравенства.

Простейшие тригонометрические уравнения.

Уравнение **sin x = a**, где $-1 \le a \le 1$, имеет бесконечно много корней. Например, уравнению sin x = $\frac{1}{2}$ удовлетворяют следующие значения:

$x_1 = -\frac{11\pi}{6}, x_2 = -\frac{7\pi}{6} x_3 = \frac{\pi}{6}, x_4 = \frac{5\pi}{6}, x_5 = \frac{13\pi}{6}, x_6 = \frac{17\pi}{6}$ и т. д.

Общая формула, по которой находят все корни уравнения sin x = a, где $-1 \le a \le 1$, такова:

____ **(1)**

Решения уравнения **cos x = a**, где $-1 \le a \le 1$, находят по формуле

____ **(2)**

Уравнение **tg x = a** решается по формуле

____ **(3)**

а уравнение **ctg x = a** – по формуле

____ **(4)**

Пример 1. Решить уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$.

Р е ш е н и е. По формуле решения уравнения вида cos x = a имеем:

$$x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Так как arccos $\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, то окончательно получаем x = ± $\frac{\pi}{3}$ + 2πn, n ∈ Z.

Пример 2. Решить уравнение $tg\frac{x}{2} = 2$.

Р е ш е н и е. Воспользовавшись формулой (3), получим: $\frac{x}{2}$ = arctg 2 + πn, n ∈ Z, откуда находим: x = 2 arctg 2 + πn, n ∈ Z.

Пример 3. Решить уравнение $\sin(\frac{\pi}{10}-\frac{x}{2})-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$.

Р е ш е н и е. Запишем исходное уравнение в виде $\sin(\frac{\pi}{10}-\frac{x}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Функция синус нечетна. Поэтому $\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

По формуле (1)

$$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}=(-1)^n\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi n, n\in Z .$$

Так как $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$, имеем:

$$\begin{gathered}\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}=(-1)^n\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\pi n, n\in Z,\\ x=\frac{\pi}{5}+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z\end{gathered}.$$

Заметим, что в некоторых случаях удобнее пользоваться частными формулами:

1) $\sin x=0; x=\pi n.$

2) $\sin x=1; x=\frac{\pi}{2}+2\pi n.$

3) $\sin x=-1; x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n.$

4) $\cos x=0; x=\frac{\pi}{2}+\pi n.$

5) $\cos x=1; x=2\pi n.$

6) $\cos x=-1; x=\pi+2\pi n.$

7) $tgx=0; x=\pi n.$

8) $ctgx=0; x=\frac{\pi}{2}+\pi n.$

Тригонометрические уравнения, приводимые к квадратному.

Для решения тригонометрических уравнений вида

a $\sin^2 x$ + *b* sin x + *c* =0, *a* $\cos^2 x$ + *b* sin x + *c* = 0 и т. п.

используются следующие соотношения: $\sin^2x = 1 - \cos^2x$; $\cos^2x = 1 - \sin^2x$,

а также формулы корней квадратного уравнения и уравнений вида sin x = a, cos x = a.

Пример 4. Решить уравнение $2\sin^2x + \sin x - 1 = 0$.

Р е ш е н и е. Введем новую переменную y = sin x. Тогда данное уравнение можно записать в виде $2y^2 + y - 1 = 0$.

Мы получили квадратное уравнение относительно y. Решая его, найдем:

$$y_1 = \frac{1}{2},\ y_2 = -1.$$

Следовательно, $\sin x = \frac{1}{2}$ или $\sin x = -1$. В первом случае получим решения

$$x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n, \text{ т. е. } x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z .$$

Во втором случае имеем: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$.

Пример 5. Решить уравнение $8\cos^2 x + 6\cos x - 3 = 0$.

Р е ш е н и е. Заменяя $\sin^2 x$ на $1 - \cos^2 x$, получим:

$$8(1 - \cos^2 x) + 6\cos x - 3 = 0,$$

$$8\cos^2 x - 6\cos x - 5 = 0.$$

Введем новую переменную. Обозначим cos x через y. Тогда уравнение примет вид:

$$8y^2 - 6y - 5 = 0.$$

Корни последнего уравнения: $y_1 = -\frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{5}{4}$.

Следовательно, $\cos x = -\frac{1}{2}$, $\cos x = \frac{5}{4}$.

Уравнение $\cos x = \frac{5}{4}$ не имеет решений, так как cos x не может быть больше единицы.

Решая уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$, находим: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

Уравнение вида *a tg x + b ctg x + c = 0* приводится к квадратному уравнению одной тригонометрической функции путем замены $ctgx = \frac{1}{tgx}$.

Пример 6. Решить уравнение tg x + 2 ctg x = 3.

Р е ш е н и е. Обозначим tg x через y. Поскольку $ctgx = \frac{1}{tgx}$, получаем уравнение $y + \frac{2}{y} = 3$, которое приводится к квадратному $y^2 - 3y + 2 = 0$ (при условии $y \neq 0$). Его корни y =2 и y = 1.

1) tg x = 2, x = arctg 2 + πn, $n \in Z$.

2) tg x = 1, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

<u>Однородные тригонометрические уравнения.</u>

Уравнение вида *a sinx + b cos x =0 (a ≠ 0, b ≠ 0)* называется однородным первой степени относительно sin x и cos x. Оно решается делением обеих его частей на cos x ≠ 0. В результате получается уравнение вида *a tg x + b = 0.*

Уравнение вида $a\ sin^2x + b\ sin\ x\ cos\ x + c\ cos^2x = 0$ называется однородным уравнением второй степени относительно sin x и cos x, если все три коэффициента a, b, c или какие-либо два из них отличны от нуля. Считая, что $a \neq 0$, разделим обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0$, тогда получим:

$$a\ tg^2x + b\ tg\ x + c = 0.$$

Полученное уравнение равносильно исходному, так как корни уравнения $\cos^2 x = 0$ не являются корнями исходного уравнения.

Однако если a = 0, то исходное уравнение принимает вид $b\ sin\ x\ cos\ x + c\ cos^2x = 0$, которое решается разложением левой части на множители: $cos\ x\ (\ b\ sin\ x + c\ cos\ x) = 0.$

Пример 7. Решить уравнение $3 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$.

Р е ш е н и е. Значения аргумента, при которых cos x = 0, не являются решениями этого уравнения, так как если cos x = 0, то должно выполняться равенство $3 \sin^2 x = 0$, а косинус и синус не могут быть одновременно равными нулю (это следует из основного тригонометрического тождества). Поэтому обе части уравнения можно разделить на $\cos^2 x$ (или на $\sin^2 x$) и при этом получить уравнение, равносильное данному уравнению

$$3\ tg^2x - 4\ tg\ x + 1 = 0,$$

откуда tg x = 1 или tg x = $\frac{1}{3}$. Следовательно,

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z \ \text{ или } \ x = arctg\frac{1}{3} + \pi n, .n \in Z\ .$$

Пример 8. Решить уравнение $2 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$.

Р е ш е н и е. Вынесем общий множитель за скобки, получим 2 cos x (sin x – cos x) = = 0. Решим это уравнение.

1) 2 cos x = 0, cos x = 0, x = $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

2) sin x – cos x = 0.

Разделив обе части на cos x, получим tg x = 1, значит x = $\frac{\pi}{4} + \pi n$,

$n \in Z$.

З а м е ч а н и е. Если бы мы разделили обе части данного уравнения на $\cos^2 x$, то получили бы уравнение 2 tg x = 2. Корни этого уравнения: x = $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. Как видно, мы потеряли бы серию корней x = $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$. При таком способе решения необходимо учитывать, что те x, при которых cos x = 0, - корни данного уравнения.

Пример 9. Решить уравнение 22 $\cos^2 x$ + 8 sin x cos x = 7.

Р е ш е н и е. Так как $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, то данное уравнение можно заменить равносильным ему уравнением

$$22\cos^2 x + 8\sin x\cos x = 7(\sin^2 x + \cos^2 x).$$

Раскроем скобки, перенесем все члены из правой части уравнения в левую, сделаем приведение подобных членов. Получим:

$$7\sin^2 x - 8\sin x\cos x - 15\cos^2 x = 0.$$

Это – однородное уравнение второй степени. Разделив обе части этого уравнения на $\cos^2 x$, найдем:

$$7\,tg^2 x - 8\,tg\, x - 15 = 0,$$

откуда tg x = - 1, значит x = $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, n $\in$ Z, или tg x = $\frac{15}{7}$, значит, $x = arctg\frac{15}{7}+\pi n, n \in Z$

.

<u>Простейшие тригонометрические неравенства.</u>

Решение неравенств, содержащих тригонометрические функции, сводится, как правило, к решению простейших тригонометрических неравенств вида sin x > a,

cos x $\le$ a, tg x $\ge$ a и т. п. Для их решения используют единичную окружность или графики тригонометрических функций. Рассмотрим примеры.

Пример 10. Решить неравенство $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Р е ш е н и е. Для решения неравенства воспользуемся единичной окружностью.

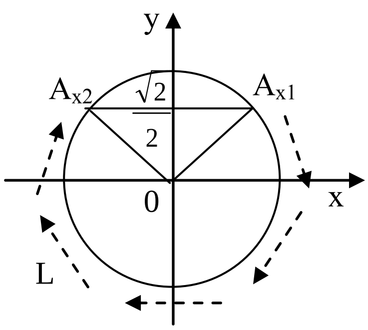


Рис. 35

Данное неравенство означает, что все точки единичной окружности при значениях x, удовлетворяющих неравенству, имеют ординату, меньшую $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Множество всех таких точек – дуга L, выделенная на рис. 35.

Концы ее A_1 и A_2 не входят в рассматриваемое множество, поскольку их ординаты не меньше, а равны $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Найдем x1 и x2.

x1 = $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$;

Рассмотрим обход дуги L от точка A_{x1} до точки A_{x2}, в направлении по часовой стрелке: x2<x1. Тогда x2 = $-\pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{5\pi}{4}$.

Таким образом, $-\frac{5\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$. Чтобы получить все решения данного неравенства, достаточно к концам этого промежутка прибавить $2\pi n$, $n \in Z$.

Окончательно имеем:

$$-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z .$$

Пример 11. Решить неравенство $\sin x > \frac{1}{2}$.

Р е ш е н и е. Для решения данного неравенства строим графики функций

$y = \sin x$ и $y = \frac{1}{2}$ (рис. 36).

Из рисунка видно, что прямая $y = \frac{1}{2}$ пересекает синусоиду в бесконечном числе точек.

На рисунке выделены несколько промежутков, удовлетворяющих неравенству, один из них $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$. Воспользовавшись тем, что значения синуса повторяются через промежуток 2π, запишем окончательный ответ:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z .$$

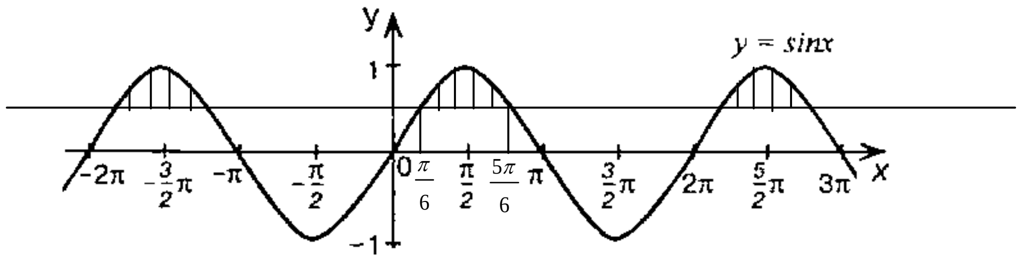


Рис. 36

Пример 12. Решить уравнение $\cos 3x \geq -\frac{1}{2}$.

Р е ш е н и е. Обозначим 3x через t, тогда данное неравенство примет вид $\cos t \geq -\frac{1}{2}$.

Этому неравенству удовлетворяют все точки, абсциссы которых больше или равны $-\frac{1}{2}$ (рис. 37).

Из рисунка видно, что эти точки дуги лежат правее прямой $x = -\frac{1}{2}$ или на самой этой прямой. Следовательно, множество всех точек, удовлетворяющих неравенству есть дуга, выделенная на рис. Концы этой дуги входят в искомое множество, так как их абсциссы равны $-\frac{1}{2}$ и, значит, удовлетворяют неравенству.

Рис. 37

Таким образом, $-\frac{2\pi}{3} \le t \le \frac{2\pi}{3}$.

Учитывая, что значения косинуса повторяются через промежуток 2π, запишем множество всех решений неравенства $\cos t \ge -\frac{1}{2}$:

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \le t \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z .$$

Переходя снова к переменной x, получаем искомый ответ:

$$\begin{aligned} -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \le 3x \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z \\ -\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3} \le x \le \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z \end{aligned}.$$

Пример 13. Решить неравенство tg x ≤ 1.

Р е ш е н и е. Построим единичную окружность и проведем линию тангенсов, которая является касательной к окружности в точке (1; 0).

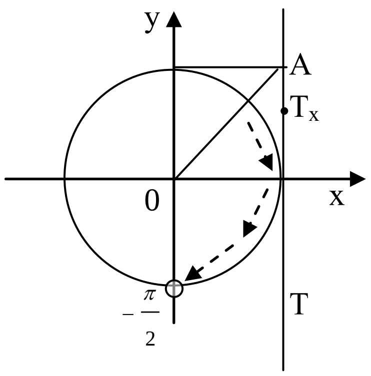


Рис. 38

Так как x – решение неравенства tg x ≤ 1, то ордината точки T_x, должна быть меньшеили равна 1.

Все такие точки лежат на луче AT (рис. 38).

Точки единичной окружности, соответствующие точкам T_x, образуют дугу, выделенную на рис. Для точек этой дуги выполняется неравенство

$$-\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{4}.$$

Учитывая, что значения тангенса повторяются через π, получаем ответ:

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \le \frac{\pi}{4} + n, n \in Z$$

Упражнения для самостоятельного решения.

Решите уравнения (37 – 42):

№37.

а) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos x = -\frac{1}{2}$; в) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\sin x = \frac{1}{2}$; д) $tgx = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; е) $ctgx = \sqrt{3}$.

№38. а) 2 cos x + $\sqrt{3}$ = 0; б) cos x + 1 = 0; в) 2 sin x + $\sqrt{2}$ = 0;

г) 2 sin x + 1 = 0; д) $\sqrt{3}$ ctg x – 1 = 0; е) tg x + $\sqrt{3}$ = 0.

№39. а) $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos \frac{x}{4} = -\frac{1}{2}$; в) $\sin\left(-\frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) $\operatorname{tg}(-4x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$; д) $\cos 4x = 0$; е) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{x}{2}\right) = 1$.

№40. а) $2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$; б) $2\sin(3x - \frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}$;

в) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{3}\right) = 3$; г) $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0$.

№41. а) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right) = -1$; б) $2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{4}\right) = \sqrt{3}$;

в) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) = -1$; г) $2\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right) = \sqrt{2}$.

№42*. а) $\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin^2\frac{x}{4} - \cos^2\frac{x}{4} = 1$;

в) $\sin 2x \cos 2x = -\frac{1}{2}$; г) $\sin\frac{x}{3}\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{x}{3}\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

№43*. Решите уравнения $\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right) = \frac{1}{2}$, $\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = -1$ и найдите для каждого из них:

а)наименьший положительный корень;

б)корни, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$;

в)наибольший отрицательный корень;

г)корни, принадлежащие промежутку $\left(-\pi;\frac{\pi}{2}\right)$.

Решите уравнения (44 – 49):

№44. а) $3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$; б) $4\cos^2 x - 8\cos x + 3 = 0$; в) $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$;
г) $6\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$; д) $3\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 1 = 0$; е) $5\sin^2 x + 6\cos x - 6 = 0$;

ж) $4\cos x = 4 - \sin^2 x$; з) $\operatorname{tg}x - 2\operatorname{ctg}x + 1 = 0$; и) $\sin^2\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2} = -2$.

№45. а) $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x = 0$; б) $4\cos^2 x - 3 = 0$;

в) $\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x = 0$; г) $4\sin^2 x - 1 = 0$.

№46. а) $3\sin^2 x + \sin x\cos x = 2\cos^2 x$; б) $2\cos^2 x - 3\sin x\cos x + \sin^2 x = 0$;
в) $9\sin x\cos x - 7\cos^2 x = 2\sin^2 x$; г) $2\sin^2 x - \sin x\cos x = \cos^2 x$.

№47. а) $4\sin^2 x - \sin 2x = 3$; б) $\cos 2x = 2\cos x - 1$;

в) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$; г) $\operatorname{tg}x = 3\operatorname{ctg} x$.

№48*. а) $\sin^4\frac{x}{4} - \cos^4\frac{x}{4} = \frac{1}{2}$; б) $4(1 + \cos x) = 3\cos\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{2}$;

в) $4(1 – \cos x) = 3\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$; г) $1 – \cos x = 2\sin\frac{x}{2}$;

д) $22\cos^2 x + 4\sin 2x = 7$; е) $2\cos^2(270^0 + x) + 3\sin(x + \frac{\pi}{2}) = 0$;

ж) $\sin 4x + \sin^2 2x = 0$; з) $\sin^3 x + \cos^3 x = 0$.

№49*. а) $\cos 5x – \cos 3x = 0$; б) $\sin 7x – \sin x = \cos 4x$;

в) $\sin 5x – \sin x = 0$; г) $\cos 3x + \cos x = 4\cos 2x$.

№50. На единичной окружности отметьте точки, для которых соответствующие значения х удовлетворяют данному неравенству. Найдите множество значений х, удовлетворяющих неравенству и принадлежащих указанному промежутку

а) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, х є [-π; 0]; б) $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, х є [0; π];

в) $\cos x > \frac{1}{2}$, х є $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; г) $\cos x < -\frac{1}{2}$, х є $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$;

д) $\operatorname{tg} x > -\sqrt{3}$, х є$\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$; д) $\operatorname{tg} x < \frac{1}{\sqrt{3}}$, х є$\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Решите неравенства (51 – 53):

№51. а) $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin x \geq \frac{1}{2}$; в) $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$;

е) $\cos x \geq -\frac{1}{2}$; ж) $\operatorname{tg} x \leq \sqrt{3}$; з) $\operatorname{tg} x \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$; и) $\operatorname{tg} x < -1$.

№52. а) $2\cos x – 1 \geq 0$; б) $2\sin x + \sqrt{2} \geq 0$; в) $2\cos x - \sqrt{3} \leq 0$; г) $3\operatorname{tg} x + \sqrt{3} \geq 0$.

а) $2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$; б) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) < 1$;

в) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \geq 1$; г) $2\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{3}$.

№53*. а) $\sin\frac{\pi}{4}\cos x + \cos\frac{\pi}{4}\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin x + \cos x < \sqrt{2}$; в) $(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2})^2 < \sin x$;

г) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos x < -\frac{1}{2}$; д) $2\cos^2 x + 3\cos x – 2 \geq 0$; е) $\sin x – \cos^2 x > 0$.

<u>РАЗДЕЛ 3.</u> СТЕПЕННАЯ, ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ, ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ.

§ 1. Обобщение понятия степени.

Вам уже знакомо понятие степени числа с целым показателем. Выражение a^n определено для всех a и n, кроме случая $a = 0$ при $n \le 0$. Напомним свойства таких степеней.

*Для любых чисел **a, b** и любых целых чисел **m** и **n** справедливы равенства:*

$$a^m \cdot a^n = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_; \quad a^m : a^n = \_\_\_\_\_\_\_\_\_ \ (a \ne 0);$$

$$(a^m)^n = \_\_\_\_\_\_\_\_\_;$$

$$(ab)^n = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \ ; \ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \ (b \ne 0);$$

$$a^1 = \_\_\_; \quad a^0 = \_\_\_\_\_\_ \ (a \ne 0)$$

Отметим также следующие свойства:

1. Если $m > n$, то $a^m > a^n$ при $a > 1$ и $a^m < a^n$ при $0 < a < 1$.
2. Пусть $0 < a < b$. Тогда $a^n < b^n$ при $n > 0$; $a^n > b^n$ при $n < 0$.

Обобщим понятие степени числа, придав смысл выражениям типа $2^{0,3}$, $5^{\frac{8}{7}}$, $4^{-\frac{1}{2}}$ и т. д.

<u>Определение</u>. *Степенью числа $a > 0$ с рациональным показателем* $r = \frac{m}{n}$, где m – целое число, а n – натуральное ($n > 1$), называется число $\sqrt[n]{a^m}$.

Запишите определение степени в символьном виде __________________________________

Степень числа 0 определена только для положительных показателей; по определению $0^r = 0$ для любого $r > 0$.

Например, $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$, $128^{-\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{128^{-2}} = \left(\sqrt[7]{128}\right)^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$.

Для степени с рациональным показателем сохраняются основные свойства степеней, верные для целого показателя.

Далее определим степень с иррациональным показателем.

Пусть α – иррациональное число. Выясним, какой смысл вкладывается в запись a^α, где a – положительное число. Рассмотрим три случая: $a = 1$, $a > 1$, $0 < a < 1$.

1)Если $a = 1$, то полагают $1^\alpha = 1$.

2)Пусть $a > 1$. Возьмем любое рациональное $r_1 < \alpha$ и любое рациональное число $r_2 > \alpha$. Тогда $r_1 < r_2$ и $a^{r1} < a^{r2}$. В этом случае под a^α понимают такое число, которое заключено между a^{r1} и a^{r2} для любых рациональных чисел r_1 и r_2, таких, что $r_1 < \alpha$, а $r_2 > \alpha$.

В математике доказано, что такое число существует и единственно для любого a > 1 и любого иррационального α.

3) Пусть $0 < a < 1$. Возьмем любое рациональное $r_1 < \alpha$ и любое рациональное число $r_2 > \alpha$. Тогда $r_1 < r_2$ и $a^{r1} > a^{r2}$. В этом случае под a^{α} понимают такое число, которое заключено между a^{r2} и a^{r1} для любых рациональных чисел r_1 и r_2, удовлетворяющих неравенству $r_1 < \alpha < r_2$. В математике доказано, что такое число существует и единственно для любого a из интервала (0; 1) и любого иррационального α.

Для степени с иррациональным показателем сохраняются основные свойства степеней, верные для целого показателя.

Таким образом, определено понятие степени для любого действительного показателя.

Для степени с действительным показателем сохраняются ли основные свойства степеней?___________________________

Отметим основные свойства степени с действительным показателем.

Для любых действительных чисел x и y и любых положительных a и b справедливы следующие утверждения:

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

Пример 1. Упростить выражение а) $6^{\frac{1}{4}} \cdot 6^{\frac{3}{4}}$; б) $\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Р е ш е н и е. а) $6^{\frac{1}{4}} \cdot 6^{\frac{3}{4}} = 6^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 6$; б) $\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\left(\frac{3}{4}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{3\cdot\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$.

Пример 2. Найти значение выражения а) $\left(\frac{1}{8}\cdot 125^{-1}\right)^{-\frac{1}{3}}$; б) $\sqrt[4]{40}\cdot 2^{\frac{1}{4}} : 5^{-\frac{3}{4}}$.

Р е ш е н и е.

а) $\left(\frac{1}{8}\cdot 125^{-1}\right)^{-\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{\left(\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\right)^{3}\right)^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)^{3\cdot\frac{1}{3}}}=\frac{1}{\frac{1}{10}}=10$

б) $\sqrt[4]{40}\cdot 2^{\frac{1}{4}}:5^{-\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{2^{3}\cdot 5}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=2\cdot 5=10$.

Пример 3. Преобразовать выражения а) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}$; б) $\dfrac{a^{1,2}-b^{2,1}}{a^{0,8}+a^{0,4}b^{0,7}+b^{1,4}}$.

Р е ш е н и е.

а) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}=\dfrac{\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^{2}-\left(b^{\frac{1}{4}}\right)^{2}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}=\dfrac{\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}=a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}$;

б) $\dfrac{a^{1,2}-b^{2,1}}{a^{0,8}+a^{0,4}b^{0,7}+b^{1,4}}=\dfrac{\left(a^{0,4}\right)^{3}-\left(b^{0,7}\right)^{3}}{\left(a^{0,4}\right)^{2}+a^{0,4}b^{0,7}+\left(b^{0,7}\right)^{2}}=a^{0,4}-b^{0,7}$.

Упражнения для самостоятельного решения.

№54. Представьте в виде корня из числа выражение:

а) $3^{1,2}$; б) $5^{-\frac{2}{3}}$; в) $4^{1,25}$; г) $6^{-1\frac{1}{2}}$.

№55. Представьте выражение в виде степени с рациональным показателем:

а) $\sqrt[3]{a^{-2}}$; б) $\sqrt[7]{3b}$; в) $\sqrt[13]{b^{-7}}$; г) $\sqrt[8]{4^{5}}$.

Найдите значение числового выражения (56 – 57):

№56. а) $243^{0,4}$; б) $\left(\frac{64^{4}}{3^{8}}\right)^{-\frac{1}{8}}$; в) $16^{\frac{5}{4}}$; г) $\left(\frac{27^{3}}{125^{6}}\right)^{\frac{2}{9}}$.

№57. а) $8^{\frac{1}{2}}:\left(8^{\frac{1}{6}}\cdot 9^{\frac{3}{2}}\right)$; б) $\sqrt[3]{100}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{8}{3}}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{5}{3}}$; в) $8^{2\frac{1}{3}}:81^{0,75}$; г) $\left(1\frac{11}{25}\right)^{-0,5}\cdot\left(4\frac{17}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$;

д) $4^{\frac{1}{2}}\cdot 16^{\frac{3}{4}}\cdot 16^{-\frac{3}{4}}\cdot 32^{-\frac{4}{5}}\cdot 2^{3}$; е) $27^{\frac{1}{3}}\cdot 81^{\frac{3}{4}}\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}$;

ж) $\left(0,64\right)^{0,5}\cdot 7^{0}\cdot\left(0,027\right)^{\frac{2}{3}}:9^{-0,5}\cdot 16^{0}:\left(0,25\right)^{-1,5}-\frac{192}{125}$.

Разложите на множители (58 – 59):

№58. а) $(ax)^{\frac{1}{3}}+(ay)^{\frac{1}{3}}$; б) $a-a^{\frac{1}{2}}$; в) $3+3^{\frac{1}{2}}$; г) $(3x)^{\frac{1}{2}}-(5x)^{\frac{1}{2}}$.

№59. а) $x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}+1$; б) $c^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{4}}$;

в) $4-4^{\frac{1}{3}}$; г) $a+b^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$.

Упростите выражения (60 – 62) :

№60. а) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$; б) $\dfrac{z-8}{z^{\frac{2}{3}}+2z^{\frac{1}{3}}+4}$;

в) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-4}{x-16}$; г) $\dfrac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$.

№61. а) $\dfrac{x-y}{x^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}}\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$; б) $\dfrac{a-1}{a+a^{\frac{1}{2}}+1}:\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a^{\frac{3}{2}}-1}+2a^{\frac{1}{2}}$;

в) $\left(\dfrac{1}{a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{1}{a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$;

г) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}$.

№62*. а) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}+\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2\cdot\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

б) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-27a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+9b^{\frac{2}{3}}}:\left(1-3\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)-\sqrt[3]{a^2}$;

в) $\left(\dfrac{1}{m+\sqrt{2}}-\dfrac{m^2+4}{m^3+2\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\dfrac{m}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{m}\right)$;

г) $\left(\dfrac{|x-1|}{x}+x|x-1|+2-\dfrac{2}{x}\right):\left(x-2+x^{-1}\right)^{0,5}$.

№63*. Имеет ли смысл выражение:

а) $(-3)^{-\frac{1}{7}}$; б) $(-2)^{-4}$; в) $5^{\frac{2}{3}}$; г) $0^{-\frac{4}{7}}$.

№64*. Найдите область определения выражения:

а) $(x+1)^{-\frac{2}{7}}$; б) $x^{\frac{3}{5}}$; в) $x^{-\frac{3}{4}}$; г) $(x-5)^{\frac{2}{3}}$.1

§2. Степенная функция, ее свойства и график.

Для любого действительного числа α и каждого положительного x определено число x^{α}.

Функция, заданная формулой _________________, называется *степенной* (с показателем степени α).

Отметим некоторые <u>свойства степенной функции.</u>

На рис 39. изображены схемы графиков степенных функций при $\alpha > 1$, $\alpha = 1$ и $0 < \alpha < 1$. На рис 40. изображен график степенной функции при $\alpha < 0$.

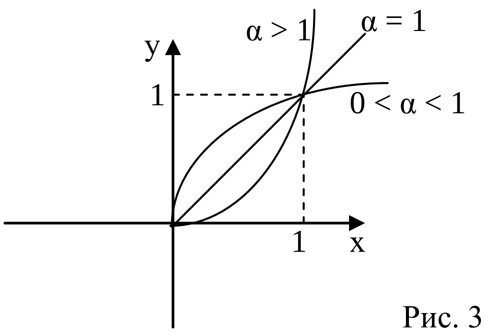


Рис. 39

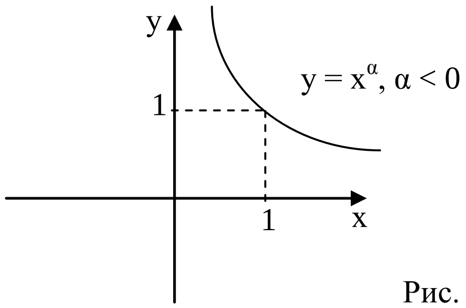


Рис. 40

З а м е ч а н и е. Для некоторых α степень x^{α} определена не только для $x > 0$. Например, если α – натуральное число: $\alpha = n$, то степень x^n определена для любого $x \in R$. Если $\alpha = -n$, где n – натуральное число, то степень x^{-n} определена для любого $x \in R$, $x \neq 0$. Функции x^n, $x \in R$, и x^{-n}, $x \in R$, $x \neq 0$, часто также называются степенными.

Эти функции являются четными, если n четное, и нечетными, если n нечетное.

Упражнения для самостоятельного решения.

№65. Постройте на одном и том же чертеже графики функций $y = x$, $y = x^2$, $y = x^{1/2}$, $y = x^{2/3}$, $y = x^{3/2}$. Укажите сходство и различие графиков этих функций.

№66. Постройте графики функций $y = x^{-3/2}$, $y = x^{-1/2}$.

№67*. На миллиметровой бумаге постройте графики функций $y = \sqrt{x}, y = \sqrt[3]{x}, y = \sqrt[4]{x}$.

1) Найдите с помощью графика приближенные значения:

а) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}$; б) $\sqrt{3}, \sqrt[4]{2{,}5}$; в) $\sqrt[3]{2{,}5}, \sqrt[4]{3}$; г) $\sqrt{2{,}5}, \sqrt[4]{2}$.

2) Найдите значения этих корней с помощью калькулятора.

3) Сравните полученные значения.

§ 3. <u>Логарифмы и их свойства.</u>

Логарифм положительного числа b *по основанию а* (где $a > 0$, $a \neq 1$)

____

____

____

Логарифм числа b по основанию a обозначается символом ___________________________.

Установите связь между понятием степени и логарифмом_____________________________

____

*Основным логарифмическое тождество*____.

Пример 1. Найти значение: а) $\log_2 32$; б) $\log_5 0{,}04$.

Р е ш е н и е. а) Заметим, что $32 = 2^5$, т. е. для того, чтобы получить число 32, надо 2 возвести в пятую степень. Следовательно, $\log_2 32 = 5$.

б) Заметим, что $0{,}04 = \dfrac{1}{25} = 5^{-2}$, поэтому $\log_5 0{,}04 = -2$.

Пример 2. Найти x, такое, что: а) $\log_8 x = \dfrac{1}{3}$; б) $\log_x 8 = -\dfrac{3}{4}$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся основным логарифмическим тождеством.

$$а) x = 8^{\log_8 x} = 8^{\frac{1}{3}} = 2;$$

$$б) x^{\log_x 8} = 8, т.е. x^{-\frac{3}{4}} = 8, откуда x = 8^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{16}$$

Для обозначения десятичных логарифмов принята специальная запись: вместо $\log_{10} b$, где b – произвольное положительное число, пишут ____.

Для обозначения натуральных логарифмов принята специальная запись: вместо $\log_e b$, где b – произвольное положительное число, пишут ____.

Запишите <u>основные свойства логарифмов</u>, используя понятие степени и логарифма.

При любом $a > 0$ ($a \neq 1$) и любых положительных x и y выполняются равенства:

1) *Логарифм единицы по любому основанию равен* ________________________________.

____;

2) *Логарифм самого основания равен* ____.

____;

3) *Логарифм произведения равен* ____.

____;

4) *Логарифм частного равен* ____.

____;

5) *Логарифм степени равен* ____.

Помимо основных свойств, при преобразовании выражений, содержащих логарифмы, полезно применять *формулу перехода* от одного основания логарифма к другому:

$$\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}.$$

Пример 3. Найти значение выражения $\frac{\lg 72 - \lg 9}{\lg 28 - \lg 7}$.

Р е ш е н и е. Пользуясь основными свойствами логарифмов, преобразуем числитель и знаменатель этой дроби: $\lg 72 - \lg 9 = \lg \frac{72}{9} = \lg 8 = \lg 2^3 = 3 \lg 2$;

$\lg 28 - \lg 7 = \lg \frac{28}{7} = \lg 4 = \lg 2^2\ 2 \lg 2$.

Следовательно, $\frac{\lg 72 - \lg 9}{\lg 28 - \lg 7} = \frac{3\lg 2}{2\lg 2} = \frac{3}{2}$.

Определим две операции: логарифмирование и потенцирование.

Логарифмирование – это преобразование, при котором логарифм выражения с переменными приводится к сумме или разности логарифмов.

Пример 4. Прологарифмировать по основанию 2 выражение $8a^3\sqrt[7]{b^4}$.

Р е ш е н и е. Пользуясь основными свойствами логарифмов, получаем:

$$\log_2(8a^3\sqrt[7]{b^4}) = \log_2(2^3 \cdot a^3 \cdot b^{\frac{4}{7}}) = 3\log_2 2 + 3\log_2 a + \frac{4}{7}\log_2 b = 3 + 3\log_2 a + \frac{4}{7}\log_2 b.$$

Потенцирование – это преобразование, обратное логарифмированию.

Пример 5. Найти x, если $\log_5 x = \log_5 7 + 2\log_5 3 - 3\log_5 2$.

Р е ш е н и е. Сначала преобразуем правую часть данного равенства, пользуясь основными свойствами логарифмов:

$$\log_5 x = \log_5 7 + \log_5 3^2 - \log_5 2^3 = \log_5 \frac{7 \cdot 9}{8} = \log_5 \frac{63}{8},$$

т. е. $\log_5 x = \log_5 \frac{63}{8}$ и поэтому $x = \frac{63}{8}$.

Упражнения для самостоятельного решения.

№68. Найдите логарифм по основанию a числа, представленного в виде степени с основанием a:

а) $3^2 = 9$; б) $2^{-3} = \frac{1}{8}$; в) $9^{\frac{1}{2}} = 3$; г) $7^0 = 1$; д) $3^{-1} = \frac{1}{3}$; е) $125^{\frac{2}{3}} = 25$; ж) $32^{\frac{3}{5}} = 8$.

№69. Проверьте справедливость равенств:

а) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$; б) $\log_{16} 1 = 0$; в) $\log_5 0,04 = -2$;

г) $\log_3 \frac{1}{243} = -5$; д) $\log_{\sqrt{2}} 8 = 6$; е) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$;

ж) $\log_{2\sqrt{2}} 128 = \dfrac{14}{3}$; з) $\log_{0,2} 0,008 = 3$; и) $\log_{\sqrt{5}} 0,2 = -2$.

№70. Найдите логарифмы данных чисел по основанию а:

а) 25, $\dfrac{1}{5}, \sqrt{25}$ при а = 5;   б) 64, 8, 2 при а = 8;

в) 27, $\dfrac{1}{9}, \sqrt{3}$ при а = 3;   д) 4; 32; 0,25 при а = 0,5.

№71. Найдите число x:

а) $\log_3 x = -1$; б) $\log_{\frac{1}{6}} = -3$; в) $\log_{\sqrt{5}} x = 0$;

г) $\log_{\frac{1}{2}} x = -3$; д) $\log_x 81 = 4$; е) $\log_x \dfrac{1}{4} = -2$.

Вычислите (72 – 73):

№72. а) lg8 + lg125; б) $\log_2 7 - \log_2 \dfrac{7}{16}$; в) $\log_{12}4 + \log_{12}36$;   г) lg13 – lg130.

№73. а) $\dfrac{\lg 8 + \lg 18}{2\lg 2 + \lg 3}$; б) $\dfrac{\log_3 16}{\log_3 4}$; в) $\log_2 11 - \log_2 44$;   г) $\log_{0,3}9 - 2\log_{0,3}10$.

Прологарифмируйте выражение по основанию 10 (все переменные положительные)(74 – 76):

№74. а) 3ac; б) $\dfrac{2ck}{a}$; в) $\dfrac{a^2k^5}{c^3}$

№75. а) $\dfrac{a^5}{0,1c^2\sqrt{b}}$; б) $\sqrt[3]{10}a^{\frac{1}{3}}b^4c^{-\frac{1}{2}}$; в) $1000a^4b^{\frac{1}{2}}c^{-3}$; г) $\dfrac{c^{\frac{7}{4}}}{10^7a^{\frac{2}{3}}b^8}$.

№76*. а) $5a\sqrt[3]{a^4(a-c)^2}$; б) $\left(\dfrac{\sqrt[3]{ac}}{\sqrt[4]{3c}}\right)^5$.

№77. Выполните потенцирование выражения:

$а) \log_6 x = 3\log_6 2 + 0,5\log_6 25 - 2\log_6 3;$

$б) \lg x = \dfrac{1}{2}\lg 5a - 3\lg b + 4\lg c;$

$в) \lg x = 5\lg m + \dfrac{2}{3}\lg n - \dfrac{1}{4}\lg p;$

$г) \log_4 x = \dfrac{1}{3}\log_4 216 - 2\log_4 10 + 4\log_4 3$

№78. Вычислите:

а) $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{1+2\log_{\frac{1}{7}} 3}$; б) $\log_{0,5\sqrt[5]{2}} \dfrac{1}{32}$; в) $16^{0,5\log_4 10+1}$;

д) $\dfrac{4}{5}(1+9^{\log_3 8})^{\log_{65} 5}$; е) $27^{\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{3}} 0,5-\log_{27} 2}$; ж) $5^{\log_{\sqrt{5}} 4+2\log_5 3}$.

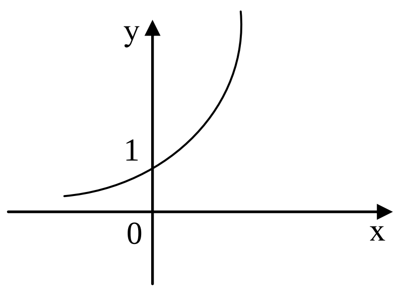
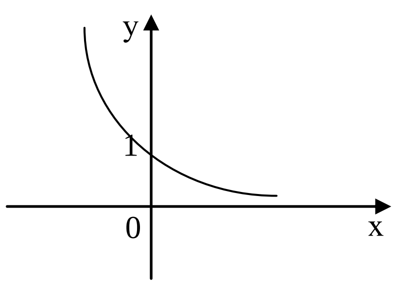
§ 4. Показательная и логарифмическая функции.

<u>Показательная функция, ее свойства и график.</u>

Функция, заданная формулой вида ____,

называется ____.

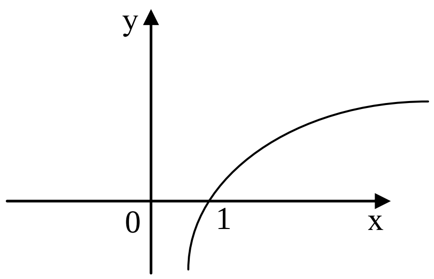
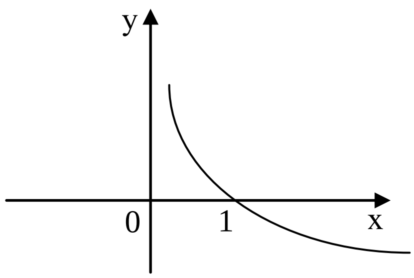
Показательная функция обладает следующими <u>свойствами:</u>

a > 1	***0 < a < 1***
График (схематично) 	График (схематично) 

<u>Логарифмическая функция, ее свойства и график.</u>

Функция, заданная формулой вида ____,
называется __________________________________.

Логарифмическая функция обладает следующими <u>свойствами:</u>

a > 1	***0 < a < 1***
____________________________________ ____________________________________ ____________________________________ ____________________________________ ____________________________________ ____________________________________ ____________________________________ ____________________________________ ____________________________________ ____________________________________ ____________________________________ ____________________________________ ____________________________________ ____________________________________ ____________________________________ ____________________________________	____________________________________ ____________________________________ ____________________________________ ____________________________________ ____________________________________ ____________________________________ ____________________________________ ____________________________________ ____________________________________ ____________________________________ ____________________________________ ____________________________________ ____________________________________ ____________________________________ ____________________________________ ____________________________________
График (схематично)  	График (схематично) 

Пример. Найти область определения функции $f(x) = \log_8(4\text{-}5x)$.

Р е ш е н и е. Область определения логарифмической функции – множество всех положительных чисел. Поэтому заданная функция определена только для тех x, при которых $4 - 5x > 0$, т. е. при $x < 0{,}8$. Следовательно, областью определения заданной функции является интервал $(-\infty; 0{,}8)$.

Упражнения для самостоятельного решения.

№79. Перечислите свойства функции и постройте ее график:

а) $y = 4^x$; б) $y = 0,2^x$; в) $y = 0,7^x$; г) $y = 2,5^x$.

№80. Найдите область значений функции:

а) $y = -2^x$; б) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x+1$; в) $-\left(\frac{1}{4}\right)^x$; г) $5^x - 2$.

№81. Сравните числа:

а) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}$ и 1; б) $3^{-\sqrt{12}}$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^{2,8}$; в) $2,5^{-\sqrt{2}}$ и 1; г) $0,3^{\frac{\sqrt{5}}{6}}$ и $0,3^{\frac{1}{3}}$.

№82*. Решить графически уравнение:

а) $3^x = 4 - x$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x+3$; в) $3^{1-x} = 2x - 1$; г) $4^x + 1 = 6 - x$.

Найдите область определения выражения (83 – 85):

№83. а) $\log_\pi(10 - 5x)$; б) $\log_5(9 - x^2)$; в) $\log_5 (x - 4)$; г) $\log_{0,3}(x^2 - 16)$.

№84. а) $\log_{\sqrt{10}}(6+x-x^2)$; б) $\lg\frac{2x+5}{x-1}$; в) $\log_{0.9}\frac{2+3x}{5-2x}$; г) $\log_{\sqrt{2}}(x^2-2x-3)$.

№85. а) $\log_7\sqrt{x+1}$; б) $\log_2(x+6)+\log_3(6-x)$.

№86. Сравните числа:

а) $\log_2 3,8$ b $\log_2 4,7$; б) $\log_{\frac{1}{3}} 0,15$ и $\log_{\frac{1}{3}} 0,2$; в) $\log_\pi 2,9$ и 1;

г) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sqrt{2}$ и $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 2,5$; д) $\log_2 10$ и $\log_5 30$; е) $\log_{0,3} 2$ и $\log_5 3$.

№87. Перечислите основные свойства функции и постройте ее график:

а) $y = \log_3 x$; б) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$; в) $y = \log_4 x$; г) $y=\log_{\frac{1}{3}} x$.

№88*. Постройте график функции:

а) $y = \log_3(x - 2)$; б) $y=3-\log_{\frac{1}{2}} x$.

№89*. Решите графически уравнение:

а) $\lg x = 1 - x$; б) $\log_{\frac{1}{5}} x = x-6$.

§ 5. Показательные уравнения и неравенства.

Показательные уравнения.

Показательное уравнение ____.

1.Простейшим примером показательного уравнения служит уравнение

$a^x = b$ (где $a > 0$, $a \neq 1$). При $b \leq 0$ данное уравнение не имеет решений. Если $b > 0$, то для того, чтобы найти корень уравнения, надо b представить в виде $b = a^c$.

2.Решение показательного уравнения вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) основано на том, что это уравнение равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

3.Уравнение вида $Aa^{2x} + Ba^x + C = 0$ с помощью подстановки $a^x = y$ сводится к квадратному уравнению $Ay^2 + By + C = 0$.

Пример 1. Решить уравнение $7^{x-2} = \sqrt[3]{49}$.

Р е ш е н и е. Заметим, что $49 = 7^2$, а $\sqrt[3]{49} = 7^{\frac{2}{3}}$. Поэтому данное уравнение можно записать в виде $7^{x-2} = 7^{\frac{2}{3}}$. Следовательно, корнями данного уравнения являются такие числа x, для которых $x - 2 = \frac{2}{3}$, т. е. $x = 2\frac{2}{3}$.

Пример 2. Решить уравнение $3^{2x+2} + 3^{2x} = 30$.

Р е ш е н и е. Представим 3^{2x+2} как $3^{2x} \cdot 3^2$. Тогда данное уравнение примет вид:

$9 \cdot 3^{2x} + 3^{2x} = 30, 10 \cdot 3^{2x} = 30, 3^{2x} = 3, 2x = 1, x = \frac{1}{2}$.

Пример 3. Решить уравнение $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$.

Р е ш е н и е. Заметим, что $4^x = (2^x)^2$. Сделаем замену переменной $y = 2^x$. Тогда данное уравнение принимает вид $y^2 - 5y + 4 = 0$. Решения этого квадратного уравнения:

$y_1 = 1$ и $y_2 = 4$. Решая уравнения $2^x = 1$ и $2^x = 4$, получаем $x = 0$ и $x = 2$.

Показательные неравенства.

Показательное неравенство ____

____.

Решение показательных неравенств вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) основано на следующих утверждениях:

1) если $a > 1$, то неравенства $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ и $f(x) > g(x)$ равносильны;

2) если $0 < a < 1$, то неравенства $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ и $f(x) < g(x)$ равносильны.

Это следует из того, что при $a > 1$ показательная функция возрастает, а при $0 < a < 1$ убывает.

Пример 4. Решить неравенство $3^x < \frac{1}{9}$.

Р е ш е н и е. Замечая, что $\frac{1}{9} = 3^{-2}$, перепишем данное неравенство в виде $3^x < 3^{-2}$. Так как основание степени больше 1, то $x < -2$. Итак, получаем ответ: $(-\infty; -2)$.

Пример 5. Решить неравенство $(0,25)^{6x-x^2} > 0,25^5$.

Р е ш е н и е. Поскольку $0 < 0,25 < 1$, заданное неравенство равносильно неравенству $6x - x^2 < 5$, т. е. $(x - 1)(x - 5) > 0$. Решая последнее, получаем ответ: $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$.

Пример 6. Решить неравенство $4^x - 6\cdot 2^x + 8 < 0$.

Р е ш е н и е. Положим $2^x = y$, тогда $4^x = (2^x)^2 = y^2$ и данное неравенство примет вид $y^2 - 6y + 8 < 0$. Решая это неравенство, находим $2 < y < 4$. Возвращаясь к переменной x, получаем $2 < 2^x < 2^2$, откуда $1 < x < 2$. Итак, интервал (1; 2) – решение данного неравенства.

Упражнения для самостоятельного решения.

Решите уравнения (90 – 98):

№90. а) $4^x = 64$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$; в) $3^x = 81$; г) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{64}$.

№91. а) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$; б) $\sqrt{8^{x-3}} = \sqrt[3]{4^{2-x}}$; в) $\sqrt{2^x}\cdot\sqrt{3^x} = 36$; г) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-3}$.

№92. а) $3^{6-x} = 3^{3x-2}$; б) $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2+x-0,5} = \frac{\sqrt{7}}{7}$; в) $\sqrt{3^x} = 9$; г) $2^{x^2+2x-0,5} = 4\sqrt{2}$

№93. а) $7^{x+2} + 4\cdot 7^{x+1} = 539$; б) $2\cdot 3^{x+1} - 3^x = 15$; в) $4^{x+1} + 4^x = 320$; г) $3\cdot 5^{x+3} + 2\cdot 5^{x+1} = 77$.

№94. а) $9^x - 8\cdot 3^x - 9 = 0$; б) $100^x - 11\cdot 10^x + 10 = 0$; в) $36^x - 4\cdot 6^x - 12 = 0$; г) $49^x - 87\cdot 7^x + 7 = 0$.

№95. а) $\sqrt{8^{x-1}} = \sqrt[3]{4^{2-x}}$; б) $2^x\cdot 5^x = 0,1(10^{x-1})^5$; в) $2,56^{\sqrt{x}-1} = \left(\frac{5}{8}\right)^{4\sqrt{x}+1}$;

г) $4^{x+1,5} + 2^{x+2} = 4$; д) $3^{3x+1} - 4\cdot 27^{x-1} + 9^{1,5x-1} = 80$

№96*. а) $2^{x-2} = 3^{x-2}$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{1-x}$;

№97*. а) $3^x + 3^{3-x} = 12$; б) $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10\cdot 2^{\sqrt{x-2}}$; в) $\left(\frac{1}{5}\right)^{1-x} - \left(\frac{1}{5}\right)^x = 4,96$; г) $4^x - 0,25^{x-2} = 15$.

№98*. а) $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$; б) $6^{2x+4} = 2^{x+8}\cdot 3^{3x}$.

Решите неравенства (99 – 104):

№99. а) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \ge 27$; б) $\left(\sqrt{6}\right)^x \le \frac{1}{36}$; в) $0,2^x \le \frac{1}{25}$; г) $(1,5)^x < 2,25$.

№100. а) $4^{5-2x} \le 0,25$; б) $0,4^{2x+1} > 0,16$; в) $0,3^{7+4x} > 0.027$; г) $3^{2-x} < 27$.

№101. а) $2^{9x-x^3} > 1$; б) $2,56^{\sqrt{x}-1} \ge \left(\frac{5}{8}\right)^{4\sqrt{x}+1}$; в) $0,4^{x^2-x-20} > 1$; г) $16^{\frac{2x+1}{3x-7}} - 64^{\frac{1}{3}}(0,25)^{-2} > 0$.

№102. а) $2^{x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}$; б) $\left(\frac{1}{25}\right)^{2x} < \left(\sqrt{5}\right)^{x^2+3,75}$; в) $\left(\frac{4}{3}\right)^{x+1} - \left(\frac{4}{3}\right)^x > \frac{3}{16}$;

г) $3^{x+2} + 3^{x-1} < 28$; д) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} - 10\cdot 3^{-x} + 3 < 0$; е) $\left(\frac{1}{36}\right)^x - 5\cdot 6^x - 6 \le 0$.

№103*. а) $2^{-2x-2,5} < \frac{0,5^{x(x+3)}}{2^{0,5}}$; б) $2^x\cdot 5^x < 10^{-3}(10^{3-x})^2$; в) $\frac{0,2^{x-0,5}}{\sqrt{5}} > 5\cdot 0,04^{x-1}$.

№104*. а) $(x-3)^{2x^2-7x} > 1$; б) $\left(x^2 - 8x + 15\right)^{x-6} < 1$.

№105*. Решите графически неравенство: а) $2^x \le 3 - x$; б) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \ge 2x + 1$.

§ 6. Логарифмические уравнения и неравенства.

Логарифмические уравнения.

Логарифмическое уравнение - ____

____.

1. Простейшим примером логарифмического уравнения служит уравнение $\log_a x = b$ (где $a > 0$, $a \neq 1$). Из определения логарифма следует, что a^b является решением данного уравнения.
2. Решение логарифмического уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ основано на том, что такое уравнение равносильно уравнению $f(x) = g(x)$ при дополнительных условиях $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$.

Отметим, что переход от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ к уравнению $f(x) = g(x)$ иногда приводит к появлению посторонних корней. Такие корни можно выявить либо с помощью подстановки найденных корней в исходное логарифмическое уравнение, либо с помощью нахождения области определения исходного уравнения (эта область задается системой неравенств $f(x) > 0$, $g(x) > 0$).

Пример 1. Решить уравнение $\log_2(x^2 + 4x + 3) = 3$.

Р е ш е н и е. Данному уравнению удовлетворяют те значения x, для которых выполнено равенство $x^2 + 4x + 3 = 2^3$. Мы получили квадратное уравнение $x^2 + 4x – 5 = 0$, корни которого равны 1 и -5. Следовательно, числа 1 и -5 – решения данного уравнения.

Пример 2. Решить уравнение $\log_5(2x + 3) = \log_5(x + 1)$.

Р е ш е н и е. Это уравнение определено для тех значений x, при которых выполнены неравенства $2x + 3 > 0$ и $x + 1 > 0$. Для этих x данное уравнение равносильно уравнению $2x + 3 = x + 1$, из которого находим $x = -2$. Однако, число -2 не удовлетворяет неравенству $x + 1 > 0$. Следовательно, данное уравнение корней не имеет.

Это же уравнение можно решить иначе. Переходя к следствию данного уравнения $2x + 3 = x + 1$, находим, что $x = -2$. Проверим найденное значение подстановкой. В данном случае получаем, что равенство $\log_5(-1) = \log_5(-1)$ не верно (оно не имеет смысла).

Пример 3. Решить уравнение $\log_5^2 x - \log_{\sqrt{5}} x - 3 = 0$.

Р е ш е н и е. Перейдем во втором слагаемом к основанию 5 и сделаем замену $y = =\log_5 x$, тогда $\log_{\sqrt{5}} x = \dfrac{\log_5 x}{\log_5 \sqrt{5}} = \dfrac{y}{\frac{1}{2}} = 2y$.

Теперь данное уравнение перепишется в виде $y^2 – 2y – 3 = 0$. Корни этого уравнения 3 и -1. Решая уравнения замены $\log_5 x = 3$ и $\log_5 x = -1$, находим $x = 5^3 = 125$ и $x = 5^{-1} = 0,2$.

Пример 4. Решить уравнение $5^{1 – 3x} = 7$.

Р е ш е н и е. По определению логарифма $1 – 3x = \log_5 7$ и $x = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\log_5 7$.

Логарифмические неравенства.

*Логарифмическое неравенство*____

____.

При решении логарифмических неравенств следует учитывать общие свойства неравенств, свойство монотонности логарифмической функции и область ее определения.

Пример 5. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(5-2x) > -2$.

Р е ш е н и е. Число -2 равно $\log_{\frac{1}{3}} 9$. Поэтому данное неравенство можно переписать в виде $\log_{\frac{1}{3}}(5-2x) > \log_{\frac{1}{3}} 9$.

Логарифмическая функция с основанием $\frac{1}{3}$ определена и убывает на множестве положительных чисел, так как $\frac{1}{3} < 1$. Следовательно, второму неравенству удовлетворяют такие числа x, для которых выполнено условие 0 < 5 – 2x < 9, откуда -2 < x < 2,5.

Итак, множество решений данного неравенства есть интервал (-2; 2,5).

Упражнения для самостоятельного решения.

Решите уравнения (106 – 111):

№106. а) $9^x = 0,7$; б) $(0,3)^x = 7$; в) $2^x = 10$; г) $10^x = \pi$.

№107. а) $\log_5 x = 2$; б) $\log_{0,4} x = -1$; в) $\log_9 x = -\frac{1}{2}$; г) $\lg x = 2$.

№108. а) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-4) = -2$; б) $\log_\pi(x^2 + 2x + 3) = \log_\pi 6$; в) $\log_{0,3}(5 + 2x) = 1$; г) $\log_2(3 – x) = 0$.

№109. а) $\log_a x = 2\log_a 3 + \log_a 5$; б) $\lg(x – 9) + \lg(2x – 1) = 2$;

в) $\frac{1}{2}\log_2(x-4) + \frac{1}{2}\log_2(2x-1) = \log_2 3$; г) $\lg(x^2 + 2x – 7) – \lg(x – 1) = 0$.

№110. а) $\log_4^2 x + \log_4 \sqrt{x} - 1,5 = 0$; б) $\lg^2 x – \lg x^2 + 1 = 0$;

в) $\log_5^2 x - \log_5 x = 2$; г). $\log^2_3 x - 2\log_3 x - 3 = 0$

№111*. а) $\frac{1}{\lg x + 1} + \frac{6}{\lg x + 5} = 1$; б) $\log_a x = \log_{\sqrt{a}} 2 + \log_{\frac{1}{a}} 3$; в) $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$;

г) $\log_2 \frac{x}{4} = \frac{15}{\log_2 \frac{x}{8} - 1}$; д) $\log_2(9 – 2^x) = 3 – x$; е) $\log_2(25^{x+3} – 1) = 2 + \log_2(5^{x+3} + 1)$.

Решите неравенства (112 - 114):

№112. а) $\log_3 x > 2$; б) $\log_{0,5} x > -2$; в) $\log_{0,7} x < 1$; г) $\log_{2,5} x < 2$.

№113. а) $\log_4(x-2) < 2$; б) $\log_{\frac{1}{3}}(3-2x) > -1$; в) $\log_5(3x+1) > 2$; г) $\log_{\frac{1}{7}}(4x+1) < -2$.

№114*. а) $\lg(2x-3) > \lg(x+1)$; б) $\log_{0,5}(4x-7) < \log_{0,5}(x+2)$;

в) $\log_{0,5} > \log_2(3-2x)$; г) $\log_\pi(x+1) + \log_\pi x < \log_\pi 2$;

д) $\log_2^2 x - \log_2 x \le 6$; е) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 4 > 0$.

РАЗДЕЛ 4. ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ.

§1. Основные понятия и аксиомы стереометрии.

Стереометрия —____

____

____

При этом отправными являются свойства основных геометрических фигур, выражаемые аксиомами. Основными фигурами в пространстве являются ______________________________

____.

Точка является идеализацией очень маленьких объектов, т. е. таких размерами которых можно пренебречь. Евклид в своей знаменитой книге «Начала» определил точку как то, что не имеет частей (точки обозначаются прописными латинскими буквами: *A, B, C, D, …*).

Прямая является идеализацией тонкой натянутой нити, края стола прямоугольной формы. По прямой распространяется луч света (прямые обозначаются строчными латинскими буквами: *a, b, c, d, …*).

Плоскость является идеализацией ровной поверхности воды, стола, зеркала и т. п (плоскости обозначаются строчными греческими буквами: α, β, γ, …).

На рис. 41 изображены плоскость _________, прямые __________ и точки ____________. Про точку *A* и прямую *a* говорят, что они ____________________ или ______________________.

Про точки *B* и *C* и прямую *b*, что они ___________________ или ______________________.

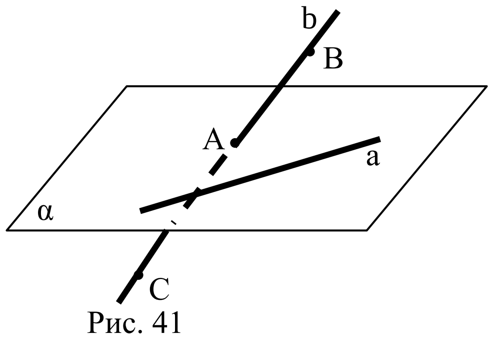


Рис. 41

Введение нового геометрического образа — плоскости — заставляет расширить систему аксиом. Поэтому вводится группа аксиом С, которая выражает основные свойства плоскостей в пространстве. Эта группа состоит из следующих трех аксиом:

C_1. ____

____

На рис. 41 точка *A* принадлежит плоскости α, а точки *B* и *C* не принадлежат ей.

C_2. ____

____

На рис. 42 две различные плоскости α и β имеют общую точку A, а значит существует прямая, принадлежащая каждой из этих плоскостей. При этом если какая – либо точка принадлежит обеим плоскостям, то она принадлежит прямой a. Плоскости α и β в этом случае называются *пересекающимися* по прямой a.

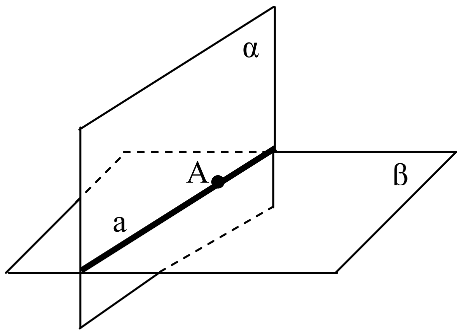


Рис. 42

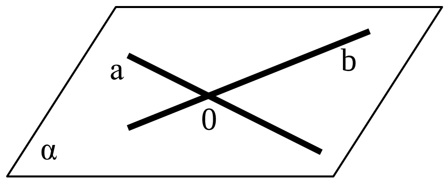


Рис. 43

C_3. ____

____

На рис. 43 изображены две различные прямые a и b, имеющие общую точку O, а, значит существует плоскость α, содержащая прямые a и b. При этом такая плоскость единственна.

Таким образом, система аксиом стереометрии состоит из

____.

Для удобства изложения напомним аксиомы планиметрии первой группы.

I_1. ***Какова бы ни была прямая, существуют точки, при надлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.***

I_2. ***Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.***

Пользуясь этими аксиомами можно доказать несколько первых теорем стереометрии.

Теорема 1.1. ***Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.***

Пример 1. Четыре точки не лежат в одной плоскости. Могут ли какие-нибудь три из них лежать на одной прямой? Объясните ответ.

Р е ш е н и е. Допустим, что какие-нибудь три точки лежат на одной прямой. Проведем через эту прямую и четвертую точку плоскость (теорема 1.1). В этой плоскости лежат все четыре точки. А это противоречит условию задачи. Значит, никакие три точки не могут лежать на одной прямой.

Теорема 1.2. ***Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.***

Из данной теоремы следует, что *плоскость и не лежащая на ней прямая либо не пересекаются, либо пересекаются в одной точке.*

Пример 2. Даны две различные прямые, пересекающиеся в точке *A*. Докажите, что все прямые, пересекающие две данные и не проходящие через точку *A*, лежат в одной плоскости.

Р е ш е н и е. Проведем через данные прямые a и *b* плоскость α (рис. 44).

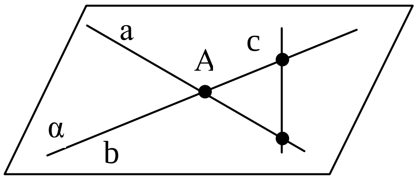


Рис. 44

Это можно сделать по аксиоме C_3. Прямая c, пересекающая данные прямые, имеет с плоскостью α две общие точки (точки пересечения с данными прямыми). По теореме 1.2 эта прямая должна лежать в плоскости α.

Теорема 1.3. . ***Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом, только одну.***

Пример 3. Можно ли провести плоскость через три точки, если они лежат на одной прямой? Объясните ответ.

Р е ш е н и е. Пусть *A, B, C* — три точки, лежащие на прямой *a.* Возьмем точку *D,* не лежащую на прямой *a* (аксиома I_1|). Через точки *A, B, D* можно провести плоскость (теорема 1.3). Эта плоскость содержит две точки прямой *a* — точки *A и B, a* значит, содержит и точку C этой прямой (теорема 1.2). Следовательно, через три точки, лежащие на одной прямой, всегда можно провести плоскость.

Упражнения для самостоятельного решения.

№115. Точки *A, B, C* и D не лежат в одной плоскости. Докажите, что прямые *A B* и CD не пересекаются.

№116. Можно ли через точку пересечения двух данных прямых провести третью прямую, не лежащую с ними в одной плоскости? Объясните ответ.

№117. Точки *A, B, C* лежат в каждой из двух различных плоскостей. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой.

№118. Докажите, что все прямые, пересекающие данную прямую и проходящие через данную точку вне прямой, лежат в одной плоскости,

№119. Докажите, что если прямые *AB* и *CD* не лежат в одной плоскости, то прямые *AC* и *BO* также не лежат в одной плоскости.

№120. Даны четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Сколько можно провести различных плоскостей, проходящих через три из этих точек? Объясните ответ.

Параллельность прямых и плоскостей.

§ 2. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.

Две прямые в пространстве называются *параллельными*, если ________________________

____.

Свойства параллельных прямых в пространстве такие же, как и на плоскости:

1) ____;

2) ____

Вместе с тем в пространстве возможен еще один случай расположения прямых.

Скрещивающиеся прямые - ____

____.

Признак скрещивающихся прямых - ____

____

____

Составьте схему взаимного расположения двух прямых в пространстве (рис. 45).

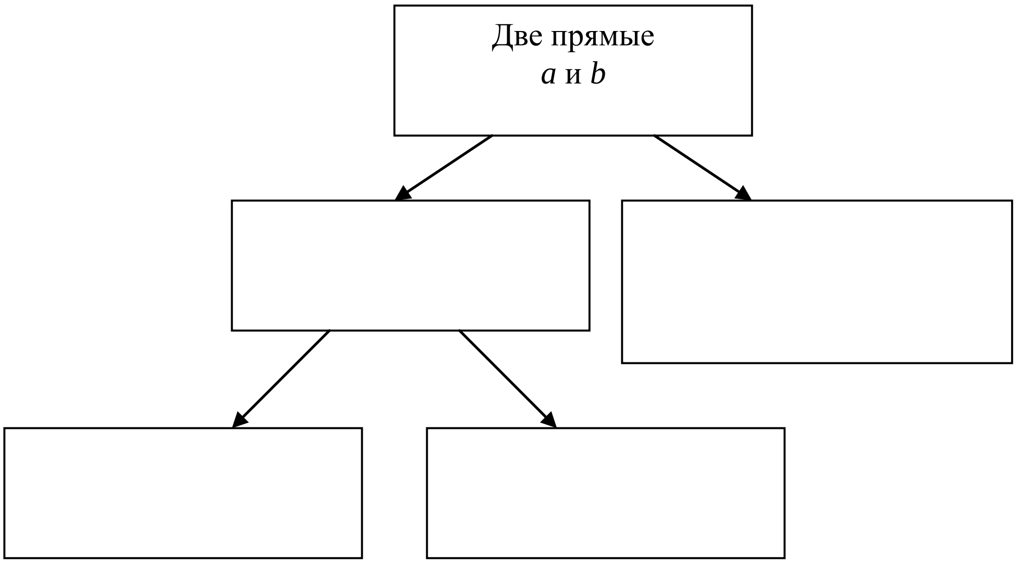


Рис. 45

Пример. Прямые a и b пересекаются. Докажите, что все прямые, параллельные прямой b и пересекающие прямую a, лежат в одной плоскости.

Р е ш е н и е. Пусть c — прямая, параллельная прямой b и пересекающая прямую a (рис. 46).

Проведем через прямые a и b плоскость α. Проведем через точку C пересечения прямых a и c в плоскости α прямую c', параллельную b. По свойству параллельных прямых через точку C можно провести только одну прямую, параллельную b.

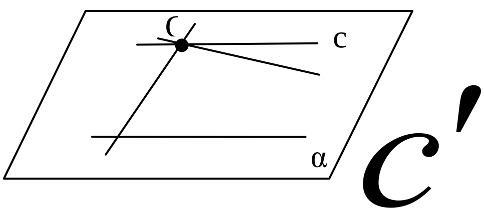


Рис. 46

Отсюда следует, что прямая c совпадает с прямой c', а значит, лежит в плоскости α. Итак, любая прямая c, параллельная b и пересекающая прямую a, лежит в плоскости α. Что и требовалось доказать.

Упражнения для самостоятельного решения.

№121. Докажите, что все прямые, пересекающие две данные параллельные прямые, лежат в одной плоскости.

№122. Докажите, что если плоскость пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.

№123. Через концы отрезка AB и его середину M проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость в точках A_1, B_1 и M_1. Найдите длину отрезка MM_1, если отрезок AB не пересекает плоскость и если $AA_1 = 5$ м, $BB_1 = 7$ м.

№124. Решите предыдущую задачу при условии, что отрезок AB пересекает плоскость.

№125. Через конец A отрезка AB проведена плоскость. Через конец B и точку C этого отрезка проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость в точках B_1 и C_1. Найдите длину отрезка BB_1 если: 1) $CC_1 = 15$ см, $AC : BC = 2 : 3$; 2) $CC_1 = 8{,}1$ см, $AB : AC = 11 : 9$; 3) $AB = 6$ см, $AC : CC_1 = 2 : 5$.

№126. Прямые a и b не лежат в одной плоскости. Можно ли провести прямую c, параллельную прямым a и b?

№127. Докажите, что если прямые AB и CD скрещивающиеся, то прямые AC и BD тоже скрещивающиеся.

§ 3. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

Прямая и плоскость называются *параллельными,* если ____________________________

____

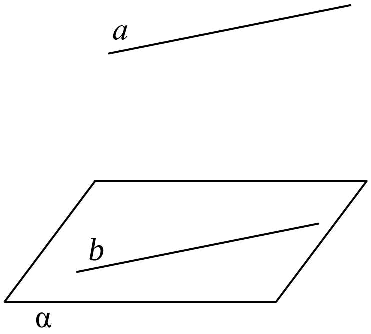


Рис. 47

Теорема 3.1. ***Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.***

Эта теорему называют <u>признаком параллельности прямой и плоскости</u>. Она позволяет в конкретной ситуации доказать, что прямая и плоскость являются параллельными.

На рис. 47 изображена прямая *a*, параллельная прямой *b*, лежащей в плоскости α, т. е по теореме 3.1 прямая *a* параллельна плоскости α.

Составьте схему взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве (рис. 48).

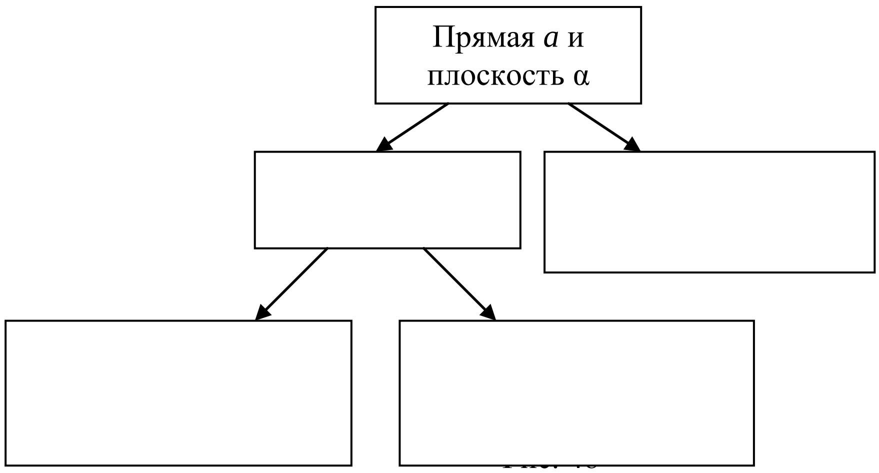


Рис. 48

Пример. Докажите, что любую из двух скрещивающихся прямых можно провести плоскость, параллельную другой прямой.

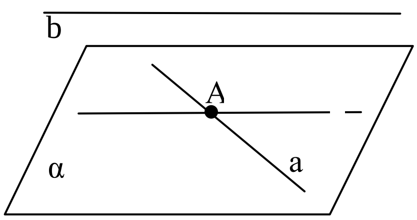


Рис. 49

Р е ш е н и е. Пусть *a и b* — две скрещивающиеся прямые (рис. 49). Возьмем на прямой *a* любую точку и проведем через нее прямую *b'*, параллельную прямой *b*, Проведем через прямые *a* и *b'* плоскость α. По теореме 3.1 она будет параллельна прямой *b*.

Упражнения для самостоятельного решения.

№128. Сторона AC треугольника ABC лежит в плоскости α, вершина B не принадлежит этой плоскости. Докажите, что прямая, проходящая через середины сторон AB и BC параллельна плоскости α.

№129. Дана трапеция $ABCD$, основания – AD и BC. Точка P не принадлежит плоскости трапеции. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков PB и PC, параллельна средней линии трапеции.

№130. Дан треугольник ABC. Плоскость, параллельная прямой $A\ B$, пересекает сторону AC этого треугольника в точке A_1, а сторону BC — в точке B_1. Найдите длину отрезка A_1B_1, если: 1) AB = 15 см, $AA_1 : AC$ = = 2 : 3; 3) B_1C = = 10 см, $AB : BC$ = 4 : 5.

№131. Докажите, что через любую из двух скрещивающихся прямых можно провести плоскость, параллельную другой прямой.

№132. Докажите, что если две плоскости, пересекающиеся по прямой a, пересекают плоскость α по параллельным прямым, то прямая a параллельна плоскости α.

№133. Через данную точку проведите прямую, параллельную каждой из двух данных пересекающихся плоскостей.

§4. Взаимное расположение плоскостей в пространстве.

Две плоскости называются *параллельными*, если ________________________________.

Теорема 4.1. ***Две плоскости параллельны, если одна из них параллельна двум пересекающимся прямым, лежащим в другой плоскости.***

Эту теорему называют <u>признаком параллельности двух плоскостей.</u>

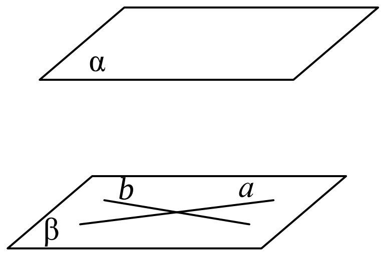


Рис. 50

На рис. 50 плоскость α параллельна пересекающимся прямым a и b, лежащим в плоскости β, тогда по теореме 4.1 эти плоскости параллельны.

Теоремы о параллельных плоскостях.

Теорема 4.2. ***Через точку вне данной плоскости можно провести плоскость параллельную данной, и притом только одну.***

Пример 1. Плоскости α и β параллельны плоскости γ. Могут ли плоскости α и β пересекаться?

Р е ш е н и е. Плоскости α и β не могут пересекаться. Если бы плоскости α и β имели общую точку, то через эту точку проходили бы две плоскости (α и β), параллельные плоскости γ. А это противоречит теореме 4.2.

Теорема 4.3. ***Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны*.**

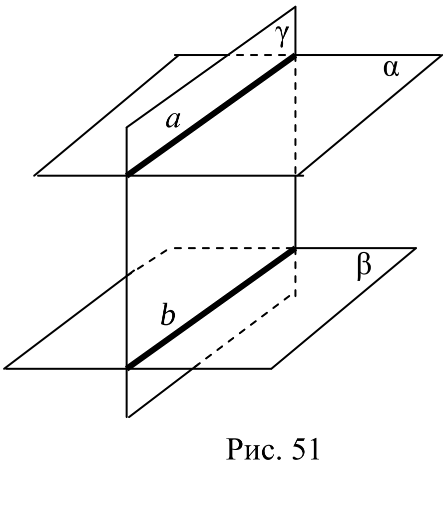


Рис. 51

На рис. 51 изображены две параллельные плоскости α и β, а плоскость γ их пересекает по прямым a и b. Тогда по теореме 4.3 можно утверждать, что прямые a и b параллельны.

Пример 2. Даны две параллельные плоскости α_1 и α_2, не лежащая ни в одной из этих плоскостей. Через точку *A* проведена произвольная прямая. Пусть X_1 и X_2 – точки пересечения с плоскостями α_1 и α_2. Докажите, что отношение длин отрезков $AX_1 : AX_2$ не зависит от взятой прямой.

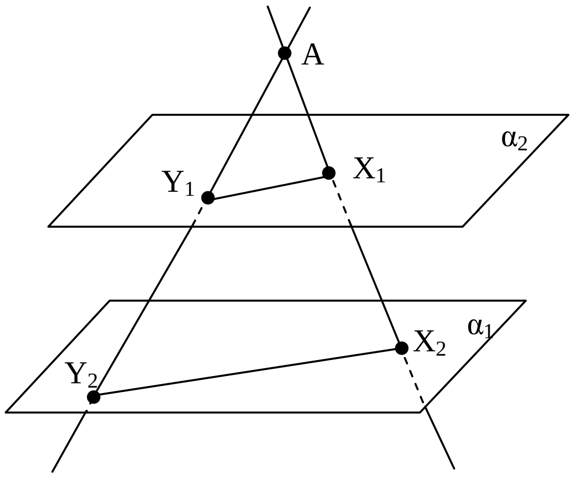


Рис. 52

Р е ш е н и е. Проведем через точку *A* другую прямую и обозначим через $У_1$ и $У_2$ точки пересечения ее с плоскостями α_1 и α_2 (рис. 52). Проведем через прямые AX_1 и $AУ_1$ плоскость. Она пересечет плоскости α_1 и α_2 по параллельным прямым $X_1У_1$, и $X_2У_2$ (свойство 2)). Отсюда следует подобие треугольников $AX_1У_1$ и AX_2Y_2. А из подобия треугольников следует пропорция

$$\frac{AX_1}{AX_2} = \frac{AY_1}{AY_2},$$

т. е. отношения $AX_1 : AX_2$ и $AУ_1 : AY_2$ одинаковы для обеих прямых.

Теорема 4.4. ***Отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны.***

На теореме 4.4 отрезки *AB* и *CD*, изображенные на рис. 53, равны, так как $\alpha \,||\, \beta$ и $a \,||\, b$.

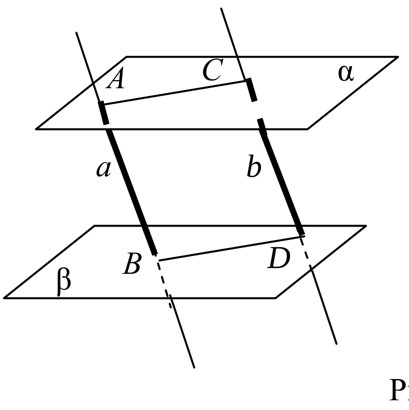


Рис. 53

Составьте схему взаимного расположения двух плоскостей в пространстве (рис. 54).

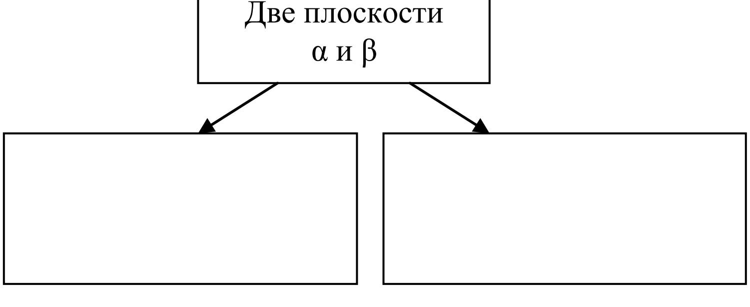


Рис. 54

Упражнения для самостоятельного решения.

№134. Плоскости α и β пересекаются. Докажите, что любая плоскость γ пересекает хотя бы одну из плоскостей α, β.

№135. Через вершины параллелограмма $ABCD$, лежащего в одной из двух параллельных плоскостей, проведены параллельные прямые, пересекающие вторую плоскость в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ тоже параллелограмм.

№136. Через вершины треугольника ABC, лежащего в одной из двух параллельных плоскостей, проведены параллельные прямые, пересекающие вторую плоскость в точках A_1, B_1, C_1. Докажите равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

№137. Три прямые, проходящие через одну точку, пересекают данную плоскость в точках A, B, C, а параллельную ей плоскость в точках A_1, B_1, C_1. Докажите подобие треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

№138. Даны две параллельные плоскости. Через точки A и B одной из этих плоскостей проведены параллельные прямые, пересекающие вторую плоскость в точках A_1 и B_1. Чему равен отрезок A_1B_1, если AB = а?

Перпендикулярность прямых и плоскостей.

Так же, как и на плоскости, две прямые в пространстве называются *перпендикулярными,* ____.

Рассмотрим перпендикулярность прямой и плоскости и перпендикулярность плоскостей.

§ 5. Перпендикулярность прямой и плоскости.

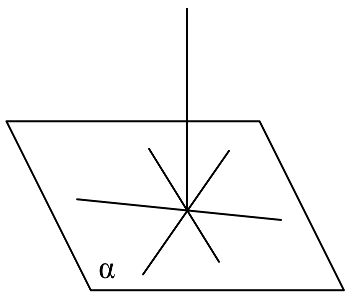


Рис. 55

Прямая, пересекающая плоскость, называется *перпендикулярной* этой плоскости, если ______________________________
____
____
____

На рис. 55 изображена прямая *a,* перпендикулярная плоскости α.

Теорема 5.1. ***Если прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна двум прямым в этой плоскости, проходящим через точку пересечения, то она перпендикулярна плоскости.***

Эту теорему называют <u>признаком перпендикулярности прямой и плоскости</u> или <u>теоремой о двух перпендикулярах</u>.

Пример 1. Докажите, что через любую точку данной прямой можно провести перпендикулярную ей плоскость.

Р е ш е н и е. Пусть *a* — данная прямая и *A* — точка на ней (рис. 56). Проведем через точку *A* две различные перпендикулярные ей прямые. Проведем через эти прямые плоскость α (аксиома C_3). Плоскость α проходит через точку *A* и перпендикулярна прямой *a* (теорема 3.1).

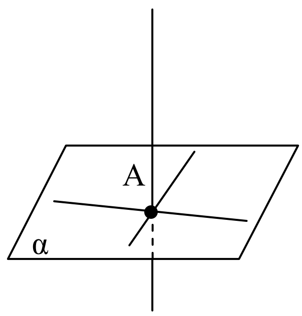


Рис. 56

В следующих двух теоремах говорится о взаимосвязи параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей.

Теорема 5.2. ***Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.***

Теорема 5.3. ***Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.***

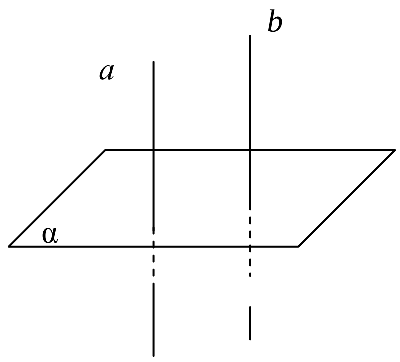


Рис. 57

На рис. 57 изображены такие прямые *a* и *b* и плоскость α, о которых говорится в теоремах 3.2 и 3.3.

Пример 2. Докажите, что через любую точку *A* можно провести прямую, перпендикулярную данной плоскости α.

Р е ш е н и е. Проведем в плоскости α две пересекающиеся прямые *b* и *c* (рис. 58*)*. Через точку их пересечения проведем плоскости β и γ, перпендикулярные прямым *b* и *c* соответственно. Они пересекаются по некоторой прямой *a.* Прямая *a* перпендикулярна прямым *b* и *c*, значит, и плоскости α. Проведем теперь через точку *A* прямую *d,* параллельную *a.* По теореме 3.2 она перпендикулярна плоскости a.

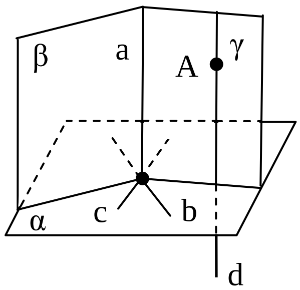


Рис. 58

Упражнения для самостоятельного решения.

№139. Докажите, что через любую точку плоскости можно провести перпендикулярную ей прямую.

№140. Докажите, что через точку, не лежащую в данной плоскости, нельзя провести более одной прямой, перпендикулярной плоскости.

№141. Через центр описанной около треугольника окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. Докажите, что каждая точка этой прямой равноудалена от вершин треугольника.

№142. Через центр вписанной в треугольник окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. Докажите, что каждая точка этой прямой равноудалена от сторон треугольника.

№143. Основание *AD* трапеции *ABCD* лежит в плоскости α, а основания *BC* – не лежит в этой плоскости. Из вершины *B* трапеции и точки пересечения ее диагоналей *O* проведены прямые, перпендикулярные плоскости α. Точки пересечения этих прямых с плоскостью - B_1 и O_1 соответственно. Найдите длину отрезка OO_1, если BB_1 = 10 см, а основания трапеции относятся как 7 : 3.

§6. Перпендикуляр и наклонная к плоскости.

Перпендикуляр, опущенный из данной точки на данную плоскость, - ____________________

____

____

Основание перпендикуляра - ____.

Расстояние от точки до плоскости ____

____

Наклонная, проведенной из данной точки к данной плоскости, -______________________

____

____

Основание наклонной -____ .

Проекцией наклонной ____

____.

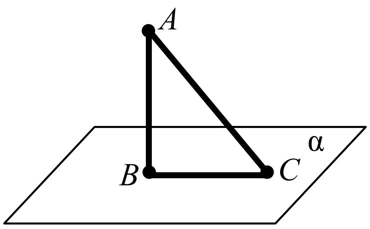


Рис. 59

Укажите на рис. 59 перпендикуляр, проекцию и наклонную.

____

____

____

Теорема 6.1. ***Прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной перпендикулярно ее проекции, перпендикулярна и самой наклонной. И обратно, если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.***

Эта теорему называют теоремой о трех перпендикулярах.

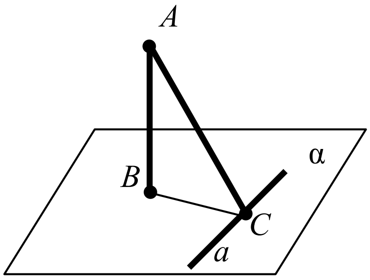


Рис. 61

На рис. 61 к плоскости α проведены перпендикуляр AB и наклонная AC. Прямая a, лежащая в плоскости α, перпендикулярна BC – проекции наклонной AC на плоскость α. По теореме 3.4 прямая a перпендикулярна наклонной AC. Если было бы известно, что прямая a перпендикулярна наклонной AC, то по теореме 3.4 она была бы перпендикулярна и ее проекции – BC.

Пример 1. Катеты прямоугольного треугольника ABC равны 15 см и 29 см. Из вершины прямого угла C проведен к плоскости этого треугольника перпендикуляр CD = 35 см (рис. 62). Найдите расстояние от точки D до гипотенузы AB.

Р е ш е н и е. Проведем прямую DE, перпендикулярную AB. По условию DC – перпендикуляр к плоскости, т. е. DE – наклонная, CE – ее проекция, поэтому по теореме о трех перпендикулярах следует, что CE и DE перпендикулярны.

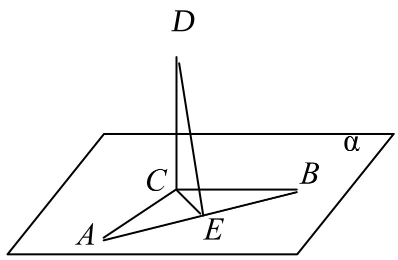


Рис. 62

Из треугольника ABC находим по теореме Пифагора AB = 25 см. Для отыскания высоты CE в треугольнике ABC находим $S_{ABC} = \dfrac{AC \cdot BC}{2} = 150$ см^2

С другой стороны, $S_{ABC} = \dfrac{AB \cdot CE}{2}$, откуда $CE = \dfrac{2S_{ABC}}{AB}$, т. е. CE = 12 см.

Из прямоугольного треугольника DCE (прямой угол при вершине C) по теореме Пифагора находим DE = 37 см.

Угол между прямой и плоскостью ____

____.

На ри. 60 изображены плоскость α и прямая a, которая ее пересекает. Прямая a' есть проекция прямой a на плоскость α. Тогда угол φ есть угол между прямой и плоскостью.

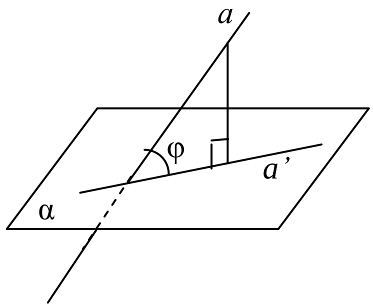


Рис. 60

Пример 2. Точка A отстоит от плоскости на расстояние 5 см. Найдите длину наклонной проведенной к этой плоскости под углом 30^0.

Р е ш е н и е. Опустим перпендикуляр AB на плоскость (рис. 59). Треугольник ABC прямоугольный с прямым углом при вершине B. По условию, AB = 5 см, острый угол при вершине C равен 30^0. Поэтому наклонная $AC = 2AB$ = 10 см.

Упражнения для самостоятельного решения.

№144. Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 10 см и 17 см. Разность проекций этих наклонных равна 9 см. Найдите проекции наклонных.

№145. Из точки к плоскости проведены две наклонные, одна из которых на 26 см больше другой. Проекции наклонных равны 12 см и 40 см. Найдите наклонные.

№146. Из точки к плоскости проведены две наклонные. Найдите длины наклонных, если они относятся как 1 : 2 и проекции наклонных равны 1 см и 7 см.

№147. Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 23 см и 33 см. Найдите расстояние от этой точки до плоскости, если проекции наклонных относятся как 2 : 3.

№148. Концы данного отрезка, не пересекающего плоскость, удалены от нее на 0,3 м и 0,5 м. Как удалена от плоскости точка, делящая данный отрезок в отношении 3 : *7?*

№149. Через середину отрезка проведена плоскость. Докажите, что концы отрезка находятся на одинаковом расстоянии от этой плоскости.

№150. Отрезок длиной 1 м пересекает плоскость, концы его удалены от плоскости на 0,5 м и 0,3 м. Найдите длину проекции отрезка на плоскость.

№151. Телефонная проволока длиной 15 м протянута от телефонного столба, где она прикреплена на высоте 8 м от поверхности земли, к дому, где ее прикрепили на высоте 20 м. Найдите расстояние между домом и столбом, предполагая, что проволока не провисает.

№152. Верхние концы двух вертикально стоящих столбов, удаленных на расстояние 3,4 м, соединены перекладиной. Высота одного столба 5,8 м, а другого 3,9 м. Найдите длину перекладины.

№153. Через конец A отрезка AB длины 4 м проведена плоскость, перпендикулярная отрезку, и в этой плоскости проведена прямая. Найдите расстояние от точки B до прямой, если расстояние от точки A до прямой равно 3.

№154. К плоскости треугольника из центра вписанной в него окружности радиуса 0,7 м восставлен перпендикуляр длиной 2,4 м. Найдите расстояние от конца этого перпендикуляра до сторон треугольника.

№155. Из вершины равностороннего треугольника ABC восставлен перпендикуляр AD к плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки D до стороны BC, если $AD = 13$ см, $BC = 6$ см.

№156. Точка M, лежащая вне плоскости данного прямого угла, удалена от вершимы угла на расстояние a, а от его сторон на расстояние b. Найдите расстояние от точки M до плоскости угла.

№157. Из данной точки к плоскости проведены две равные наклонные длиной 2 м. Найдите расстояние от точки до плоскости, если наклонные образуют угол 60^0, а их проекции перпендикулярны.

№158. Из точки, отстоящей от плоскости на расстояние 1 м, проведены две равные наклонные. Найдите расстояние между основаниями наклонных, если известно, что наклонные перпендикулярны и образуют с перпендикуляром к плоскости углы, равные 60".

№159. Через вершину прямого угла C прямоугольного треугольника ABC проведена плоскость, параллельная гипотенузе, на расстоянии 1 м от нее. Проекции катетов на эту плоскость равны 3 м и 5 м. Найдите гипотенузу.

№160. Наклонная равна a. Чему равна проекция этой наклонной на плоскость, если наклонная составляет с плоскостью угол равный: 1) 45^0; 2) 60^0; 3) 30^0.

№161. Отрезок длиной 10 м пересекает плоскость; концы его находятся на расстояниях 2 м и 3 м от плоскости. Найдите угол между данным отрезком и плоскостью.

№162. Из точки, отстоящей от плоскости на расстояние a, проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы в 45^0 и 30^0, а между собой прямой угол. Найдите расстояние между концами наклонных.

№163. Через катет равнобедренного прямоугольного треугольника проведена плоскость под углом 45^0 ко второму катету. Найдите угол между гипотенузой и плоскостью.

§7. Перпендикулярность плоскостей.

Две пересекающиеся плоскости называются *перпендикулярными,* если _______________
____
____

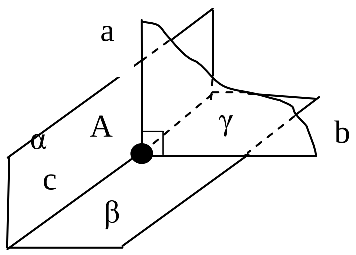


Рис. 63

На рис. 63 изображены две плоскости α и β, которые пересекаются по прямой *c*. Плоскость γ перпендикулярна прямой *c* и пересекает α и β. При этом плоскость γ пересекает плоскость α по прямой *a*, а плоскость β – по прямой *b*, причем прямые *a* и *b* перпендикулярны. Тогда по определению плоскости α и β являются перпендикулярными.

Теорема 7.1. ***Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.***

Эту теорему называют признаком перпендикулярности плоскостей.

На рис. 64 плоскость β проходит через прямую *a*, параллельную плоскости α, т. е.

По теореме 7. 1. плоскости β и α перпендикулярны.

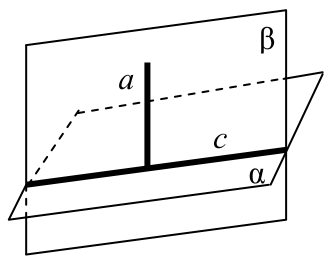


Рис. 64

Теорема 7.2. ***Если прямая, лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей, перпендикулярна их линии пересечения, то она перпендикулярна и другой плоскости.***

Пример 1. Даны прямая *a* и плоскость α. Проведите через прямую *a* плоскость, перпендикулярную плоскости *α.*

Р е ш е н и е. Через произвольную точку прямой *a* проводим прямую *b* (рис. 65), перпендикулярную плоскости α (пример 2, §5). Через прямые *a* и *b* проводим плоскость β. Плоскость β перпендикулярна плоскости α по теореме 7.1.

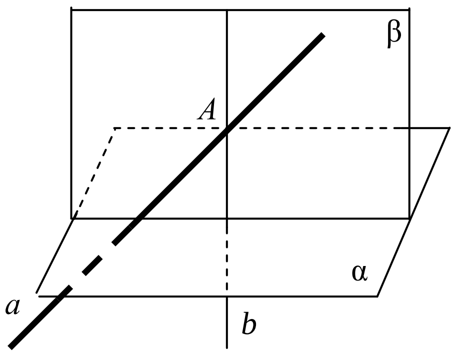


Рис. 65

Определим понятие угла между плоскостями.

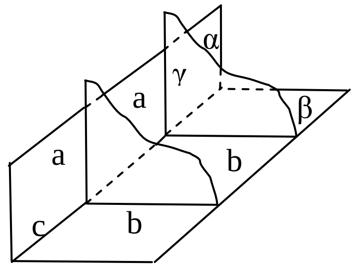


Рис. 66

Пусть данные плоскости пересекаются. Проведем плоскость, перпендикулярную прямой их пересечения. Она пересекает данные плоскости по двум прямым. Угол между этими прямыми называется *углом между данными плоскостями* (рис. 66). Определяемый так угол между плоскостями не зависит от выбора секущей плоскости.

Пример 2. Две плоскости пересекаются под углом 30^0. Точка *A*, лежащая в одной из этих плоскостей, отстоит от второй плоскости на расстояние *a*. Найдите расстояние от этой точки до прямой пересечения плоскостей.

Р е ш е н и е. Пусть α и β – данные плоскости и *A* – точка, лежащая в плоскости α (рис. 67). Опустим перпендикуляр *AA'* на плоскость β и перпендикуляр *AB* на прямую *c*, по которой пересекаются плоскости. По теореме о трех перпендикулярах прямые *A'B* и *c* перпендикулярны. По условию угол при вершине *B* прямоугольного треугольника *ABA'* равен 30^0. Имеем:

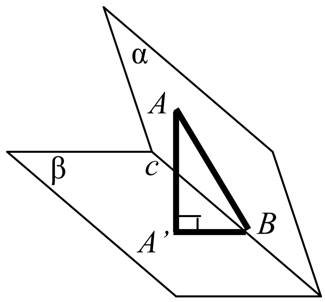


Рис. 67

$AB = AA'/\sin 30^0 = 2a$.

Таким образом, расстояние от точки *A* до прямой *c* равно *2a*.

Упражнения для самостоятельного решения.

№164. Даны прямая *a* и плоскость α. Докажите, что все прямые, перпендикулярные плоскости α и пересекающие прямую *a*, лежат в одной плоскости, перпендикулярной плоскости α.

№165. Из точек *A* и *B,* лежащих в двух перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры *AC* и *BD* на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка *AB,* если: 1) *AC* = 6 м, *BD* = 7 м, *CD* = 6 м; 2) *AD* = 4 м, *BC* = 7 м, CD = 1 м; 3) *AD* = *BC* = *5* м, *CD* = 1 м; 4} *A C = a, BD = b, CD* = c.

№166. Точка находится на расстояниях *a* и *b* от двух перпендикулярных плоскостей. Найдите расстояние от этой точки до прямой пересечения плоскостей.

№167. Плоскости α и β перпендикулярны. В плоскости α взята точка *A,* расстояние от которой до прямой *c* (линии пересечения плоскостей) равно 0,5 м. В плоскости β проведена прямая *b,* параллельная прямой с и отстоящая на 1,2 м от нее. Найдите расстояние от точки *A* до прямой *b.*

№168. Перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой *c.* В плоскости *α* проведена прямая а || с, в плоскости β — прямая *b* \\ *c.* Найдите расстояние между прямыми *a* и *b,* если расстояние между прямыми *a* и *c* равно 1,5 м, а между прямыми *b* и *c* 0,8 м.

№169. Два равнобедренных треугольника имеют общее основание, а их плоскости образуют угол 60^0. Общее основание равно 16 м; боковая сторона одного треугольника 17 м, а боковые стороны другого перпендикулярны. Найдите расстояние между вершинами треугольников.

№170. Равнобедренные треугольники *ABC* и *ABD* с общим основанием *AB* лежат в разных плоскостях, угол между которыми равен α. Найдите cos α, если *AB* = 24 м, *AC* = 13 м, *AD* = 37 м, *CD* = 35 м.

№171. Найдите угол между плоскостями, если точка, взятая на одной из них, отстоит от прямой пересечения плоскостей вдвое дальше, чем от второй плоскости.

№172. Катеты прямоугольного треугольника равны 7 м и 24 м. Найдите расстояние от вершины прямого угла до плоскости, которая проходит через гипотенузу и составляет угол 30^0 с плоскостью треугольника.

Приложения

I. Формулы сокращённого умножения

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

II. Разложение квадратного трёхчлена $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$,

где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2+bx+c = 0$

III. Квадратное уравнение $ax^2+bx+c = 0$

$\mathbf{X_{1,2}} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (формула корней квадратного уравнения)

Лиц. ИД № 02808 от 11 сентября 2000 г.
Макет и верстка – Глотова М.А.
214018, г. Смоленск, проспект Гагарина, 56, т.: (0812) 55 – 41 – 04.
E-mail: spek@spek.keytown.com