СМОЛЕНСКАЯ АКАДЕМИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Чернышева Л.В.

Иваненкова М. А.

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

по математике

(часть 2)

СМОЛЕНСК 2016

Рассмотрено и утверждено на заседании кафедры ИТ

Иваненкова М. А.

Чернышева Л.В.

Рабочая тетрадь по математике

(часть 2)

Рецензент: Емельченков Е.П.

Данная рабочая тетрадь по математике предназначена для студентов 1 курса различных специальностей.

Рабочая тетрадь содержит краткие теоретические сведения, примеры решения типовых задач, упражнения для самостоятельного решения (среди которых задания репродуктивного, частично-поискового и творческого уровня).

Содержание:

РАЗДЕЛ 5. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

§1. Производная функции.

Приращение аргумента. Приращение функции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точках x и x_0.

Тогда разность $x - x_0$ называется ____ и обозначается Δx (читается «____________________»).

Таким образом, $\Delta x = x - x_0$. Из данного равенства следует, что $x = x_0 + \Delta x$.

Говорят также, что первоначальное значение аргумента x_0 получило приращение Δx. Вследствие этого значение функции измениться на величину

$f(x) – f(x_0) = f (x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Эта разность называется ____ ______________________________________ и обозначается Δf (читается «____________________»).

Таким образом, по определению $\Delta f =$ _______________________________.

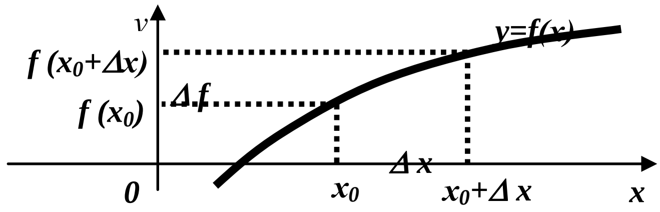


Рис. 1

Пример1. Для функции $f(x) = x^2$ найдем Δx и Δf, если $x = 2{,}5$, $x_0 = 2$.

Р е ш е н и е.

$\Delta x = x - x_0 = 2{,}5 – 2 = 0{,}5$.

$\Delta f = f(x) – f(x_0) = f(2{,}5) – f(2) = 6{,}25 – 4 = 2{,}25$.

Пример 2. Найдем приращение Δy функции $y = x^2 + 2x – 4$ в точке x, если приращение аргумента равно Δx.

Р е ш е н и е. Найдем приращение функции

$\Delta y = y (x + \Delta x) - y(x) = (x + \Delta x)^2 + 2 (x + \Delta x) – 4 – x^2 – 2x + 4 =$

$x^2 + 2x \Delta x + (\Delta x)^2 + 2x + 2 \Delta x – 4 – x^2 – 2x + 4 = 2x \Delta x + 2 \Delta x + (\Delta x)^2$.

Определение производной.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x и в некоторой окрестности этой точки. Пусть Δx – приращение аргумента, причем такое, что точка $x + \Delta x$ принадлежит указанной окрестности точки x, а Δf – соответствующее приращение функции, т. е.

$\Delta f = f (x + \Delta x) - f(x)$.

Производной функции f в точке x называется ________________________________

____

____

____

Производная функции f в точке x обозначается $f'(x)$

(читается «_____________________________________»).

$f'(x)$ - это новая функция, определенная во всех таких точках x, в которых существует указанное число; эту функцию называют ***производной функции y=f(x).***

Нахождение производной данной функции называется _______________________

____

Опираясь на определение, вычисление производной функции y = f(x) производится в соответствии со следующим <u>планом:</u>

1) ____
____;
2) ____
____;
3) ____
____;
4) ____
____.

Пример 3. Найдем производную постоянной функции f(x) = c.

Р е ш е н и е.

1) x, $\Delta x \neq 0$, x + Δx.
2) $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0$.
3) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$.
4) Получили, что $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 0$ при любом Δx , и, значит, $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Следовательно, $f'(x) = (c)' = 0$.

<u>**Задание.**</u> ***Найдите производную функции f(x) = x.***

Р е ш е н и е.

1) ____
____;
2) ____
____;

3) ____

____;

4) ____

____.

Следовательно, $f'(x) = (x)' =$ ______

Пример 4. Найдем производную функции f(x) = x^2.

Р е ш е н и е.

1) x, $\Delta x \neq 0$, x + Δx.

2) $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$.

3) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$.

4) Заметим, что слагаемое 2x постоянно, а при $\Delta x \to 0$ очевидно, второе слагаемое стремится к нулю. Получаем: $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to 2x$ при $\Delta x \to 0$.

Следовательно, $f'(x) = (x^2)' = 2x$.

<u>**Задание.**</u> ***Найдите производную функции f(x) = x^3.***

Р е ш е н и е.

1) ____

____;

2) ____

____;

3) ____

____;

4) ____

____.

Следовательно, $f'(x) = (x^3)' =$ ______ .

<u>**Основные правила дифференцирования.**</u>

Пусть u и v – две функции, дифференцируемые в точке x. Тогда сумма, произведение и частное этих функций также дифференцируемы, причем:

1) $(u + v)' =$ ________________ ;

Словесная формулировка:____

____

2) $(uv)' =$ __________________ ;

Словесная формулировка:____

____

____

<u>Следствие.</u> $(cu)' = cu'$, где с – произвольная постоянная.

(*вывод формулы*____)

Словесная формулировка:____

____

3) $\left(\frac{u}{v}\right)' =$ ____________________

Словесная формулировка:____

____

____

Пример 5. Найдем $f'(x)$, если а) $f(x) = x + 5$; б) $f(x) = (2x^2 - 3)(3x + 5)$;

в) $f(x) = \frac{3 + 5x}{1 - 3x}$.

Р е ш е н и е.

а) $f'(x) = (x + 5)' = (x)' + (5)' = 1 + 0 = 1$.

б) $f'(x) = ((2x^2 - 3)(3x + 5))' = (2x^2 - 3)'(3x + 5) + (2x^2 - 3)(3x + 5)'$.

Вычислим $(2x^2 - 3)'$ и $(3x + 5)'$:

$(2x^2 - 3)' = (2x^2)' - (3)' = 2(x^2)' - 0 = 2 \cdot 2x = 4x$;

$(3x + 5)' = (3x)' + (5)' = 3(x)' + 0 = 3 \cdot 1 = 3$.

Следовательно, $f'(x) = 4x(3x + 5) + (2x^2 - 3) \cdot 3 = 12x^2 + 20x + 6x^2 - 9 = 18x^2 + 20x - 9$.

в) $f(x) = \frac{3 + 5x}{1 - 3x} = \frac{(3 + 5x)'(1 - 3x) - (3 + 5x)(1 - 3x)'}{(1 - 3x)^2} =$

$\frac{((3)' + (5x)')(1 - 3x) - (3 + 5x)((1)' - (3x)')}{(1 - 3x)^2} == \frac{5 \cdot (1 - 3x) - (3 + 5x) \cdot (-3)}{(1 - 3x)^2} = \frac{14}{(1 - 3x)^2}$

Упражнения для самостоятельного решения.

№ 1. Найдите приращение функции в точке x_0, если:

а) $f(x) = 2x + 5$, $x_0 = 3$, $\Delta x = 0{,}2$;

б) $f(x) = 2x^2 - 3$, $x_0 = 3$, $\Delta x = -0{,}2$;

в) $f(x) = -\frac{3}{x}$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}8$;

г) $f(x) = \frac{x^2}{2}$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}1$.

№ 2. Найдите приращения Δx и Δf в точке x_0, если:

а) $f(x) = cos^2 x$, $x_0 = \frac{2\pi}{3}$, $x = \frac{3\pi}{4}$;

б) $f(x) = 4x - x^2$, $x_0 = 2{,}5$, $x = 2{,}6$;

в) $f(x) = tgx$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{3}$;

г) $f(x) = \sqrt{2x-1}$, $x_0 = 1{,}22$, $x = 1{,}345$.

№ 3. Стороны прямоугольника равны 15 м и 20 м. Найдите приращения его периметра и площади, если: 1) меньшую его сторону увеличили на 0,11 м; 2) большую его сторону увеличили на 0,2 м.

№ 4. Радиус круга равен 2 см. Найдите погрешность, допущенную при вычислении его площади, если погрешность при измерении длины радиуса равна 0,2 см.

Найдите производные функций (5 – 7):

№ 5. а) $f(x) = x^2 + x^3$; б) $f(x) = x^2 + 3x - 5$; в) $f(x) = 7x^3 - 5x^2 + x - 61$.

№ 6. а) $f(x) = x^3(4 + 2x - x^2)$; б) $f(x) = (2x-3)(1-x^3)$; в) $f(x) = x^2(3x + x^3)$.

№ 7. а) $f(x) = \frac{1+2x}{3-5x}$; б) $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$; в) $f(x) = \frac{3-4x}{x^2}$.

№ 8. Вычислите значения производной функции f в данных точках:

а) $f(x) = x^2 - 3x$, $x = -\frac{1}{2}$, x = 2;

б) $f(x) = \frac{3-x}{2+x}$, x = -3, x = 0.

№ 9. Решите уравнение $f'(x) = 0$, если:

а) $f(x) = 2x^2 - x$; б) $f(x) = 2x - 5x^2$;

в) $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 12$; г) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 1{,}5x^2 - 4x$

№ 10. Решите неравенство $f'(x) < 0$, если:

а) $f(x) = x^3 + 1{,}5x^2$; б) $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$.

№ 11*. Задайте формулой хотя бы одну функцию, производная которой равна:

а) 2x + 3; б) $16x^2 - 0{,}4$; в) 8x – 2; г) $9x^2 - \frac{1}{2}$.

§ 2. Физический и геометрический смысл производной.

<u>Физический смысл производной.</u>

Если s = s(t) – закон прямолинейного движения, то $s'(t)$ выражает *скорость движения в момент времени t,* т. е. $v = s'(t)$ (мгновенная скорость).

Например, закон свободного падения тела выражается зависимостью $s = \frac{gt^2}{2}$. Тогда скорость падения в момент t такова:

$$v = s' = \left(\frac{gt^2}{2}\right)' = \frac{g}{2}(t^2)' = \frac{g}{2}\cdot 2t = gt\,.$$

Вообще производная функции y = f(x) в точке x выражает *скорость изменения функции в точке x*, т. е. скорость протекания процесса, описываемого зависимостью

y = f(x). В этом состоит *<u>физический смысл производной.</u>* Например, для функции $y = x^2$ имеем $f'(x) = 2x$, при x = 2 имеем $f'(2) = 4$, а при x = 3 имеем $f'(3) = 6$. Это значит, что в точке x = 2 функция изменяется в 4 раза быстрее аргумента, а в точке x = 3 – в 6 раз быстрее.

<u>Геометрический смысл производной.</u>

Для функции *y = f (x)* ее производная *y' = f '(x)* в точке x_0 есть **угловой коэффициент** (тангенс угла наклона) касательной, проведенной к графику функции в точке x_0. В этом заключается *<u>геометрический смысл производной.</u>*

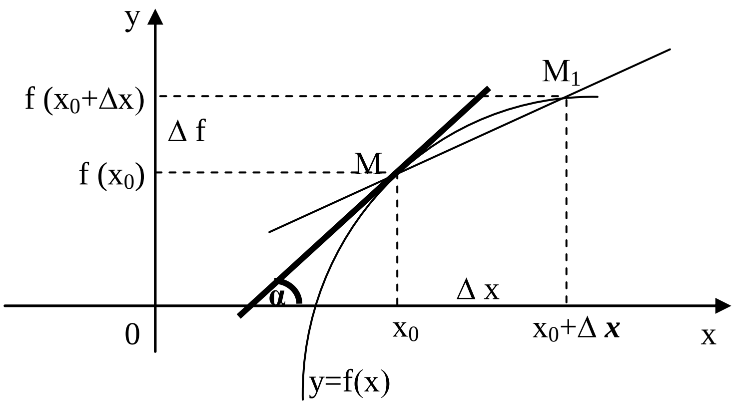


Рис. 2

$$k = tg\alpha = f'(x_0)$$

При $\Delta x \to 0$ точка M_1 переходит в точку M и секущая MM_1 становится касательной к кривой f(x) в точке M (рис. 2).

Уравнение касательной к графику функции y = f(x) в точке с абсциссой x_0 имеет вид:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\,.$$

Пример 1. Прямолинейное движение точки задано уравнением $s = 3t^2 - 2t + 5$, где t дано в секундах, а s – в метрах. Найдем скорость движения точки в момент t = 5c.

Р е ш е н и е. С физической точки зрения, производная функции, выражающей зависимость пути от времени представляет собой скорость движения, т. е.

$v(t) = s'(t) = (3t^2 - 2t + 5)' = 6t - 2$.

Тогда в момент t = 5с скорость движения равна: $v(5) = 30 - 2 = 28$ (м/с).

Пример 2. Найдем угол, образованный касательной к кривой $f(x) = x^2 - 2x + 3$ в точке $x_0 = 2$ с осью абсцисс.

Р е ш е н и е. Обозначим искомый угол через α. Тогда согласно геометрическому смыслу производной имеем

$k = tg\alpha = f'(x_0) = f'(2)$.

Так как $f'(x) = (x^2 - 2x + 3)' = 2x - 2$, то $f'(2) = 4 - 2 = 2$.

Следовательно, $tg\alpha = 2$, откуда $\alpha = arctg2$.

Упражнения для самостоятельного решения.

№ 12. Найдите мгновенную скорость точки, движущейся прямолинейно по закону s(t), в момент времени t_0

а) $s(t) = -t^2 + 8t$, $t_0 = 6$;   б) $s(t) = 3t^3 + 2$, $t_0 = 2$;

в) $s(t) = \frac{t^2}{4}$, $t_0 = 4$;   г) $s(t) = 5t - 3$, $t_0 = 10$.

№ 13. Движение точки задано уравнением $s(t) = t^2 - 8t + 7$. В какой момент времени ее скорость равна нулю?

№ 14*. Зависимость пути от времени при движении точки задана уравнением $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 1$. Найдите максимальную скорость движения этой точки.

№ 15*. Зависимость пути от времени при движении точки задана уравнением $s(t) = t^3 - 6t^2 + 2t$. Найдите минимальную скорость движения этой точки.

№ 16. В каких точках графика функции f (рис. 3) касательная к нему:

а) горизонтальна;

б) образует с осью абсцисс острый угол;

в) образует с осью абсцисс тупой угол?

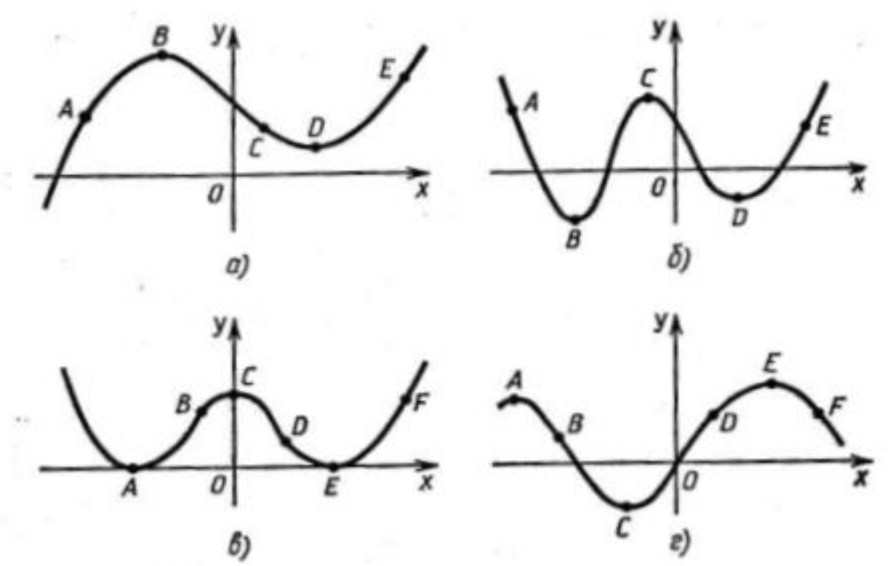


Рис. 3

№ 17. При каких значениях аргумента (отмеченных на оси абсцисс) производная функции, заданной графиком (рис. 4):

а) равна нулю;

б) больше нуля;

в) меньше нуля?

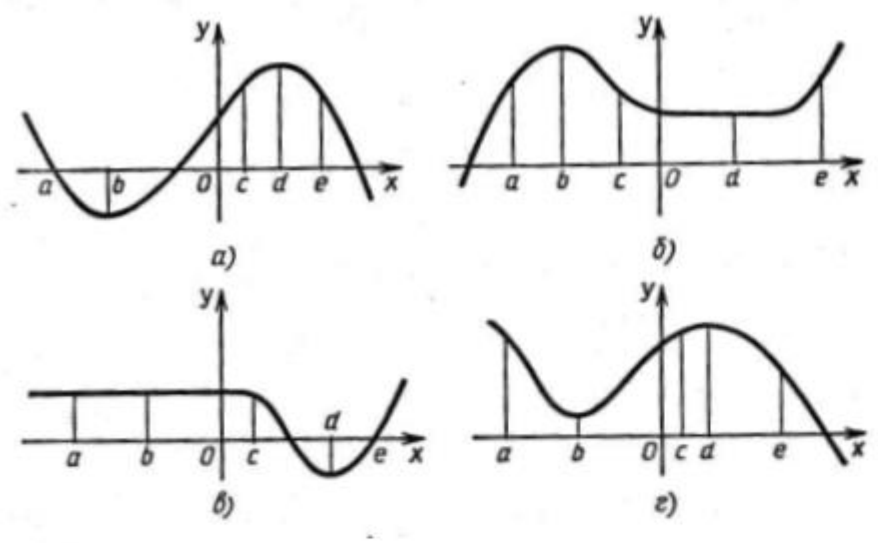


Рис. 4

№ 18. Найдите тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной, проходящей через данную точку M графика функции f:

а) $f(x) = x^2$, M (-3; 9); б) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x$, M (2; $\dfrac{2}{3}$);

в) $f(x) = x^3$, M (-1; -1); г) $f(x) = x^2 + 2x$, M (1; 3).

№ 19. Напишите уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0:

а) $f(x) = 2x - x^2$, $x_0 = 2$;

б) $f(x) = x^3 - 1$, x_0 = -1;

в) $f(x) = x^2 - 3x + 5$, x_0 = 4.

№ 20. Найдите координаты точки, в которой касательная к параболе $y = x^2 + 3x - 10$ образует угол в 135^0 с осью *Ox*.

№ 21. Найдите точки графика функции f, в которых касательная параллельна оси абсцисс:

а) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$; б) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 16x$.

№ 22*. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \frac{x+2}{x-2}$, параллельной прямой $y = -x + 2$.

№ 23*. Найдите угол, под которым пересекаются графики функций $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$ и $y = \frac{1}{2}(x-1)^2$ (*углом между кривыми* в точке их пересечения называют угол между касательными к этим кривым в этой точке).

№ 24*. Найдите точки, в которых касательные к кривым $f(x) = x^3 - x - 1$ и $g(x) = 3x^2 - 4x + 1$ параллельны. Напишите уравнения этих касательных.

§ 3. Производные элементарных функций.

Таблица производных.

В §1 были получены некоторые формулы дифференцирования:

$(c)' = 0$,

$(x)' = 1$,

$\left(x^2\right)' = 2x$,

$\left(x^3\right)' = 3x^2$.

По такому же плану могут быть получены формулы для вычисления производных основных элементарных функций.

Производная степенной функции:

$(x^n)' =$ __________________________.

Производная показательной функции:

$\left(a^x\right)' =$ _____________________;

$\left(e^x\right)' =$ _____________________.

Производная логарифмической функции:

$\left(\log_a x\right)' =$ __________________;

$\left(\ln x\right)' =$ ____________________.

Производные тригонометрических функций:

$\left(\sin x\right)' =$ __________________;

$\left(\cos x\right)' =$ __________________;

$(tgx)' =$ ___________________;

$\left(ctgx\right)' =$ __________________.

Производные обратных тригонометрических функций:

$\left(arc\sin x\right)' =$ __________________;

$\left(arc\cos x\right)' =$ __________________;

$(arctgx)' =$ ___________________;

$\left(arcctgx\right)' =$ __________________.

Например,

1) $\left(x^{10}\right)' = 10x^9$,

2) $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \left(x^{-2}\right)' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$,

3) $\left(\sqrt[5]{x^3}\right) = \left(x^{\frac{3}{5}}\right)' = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$,

4) $\left(5^x\right)' = 5^x \ln 5$,

5) $(\lg x)' = \frac{1}{x\ln 10}$.

Производная сложной функции.

Рассмотрим функцию $y=(3x+5)^4$. Чтобы найти значение этой функции в фиксированной точке x, нужно: 1) вычислить 3x + 5; 2) возвести полученное значение в четвертую степень. Иными словами, сначала надо найти значение функции $g(x)=3x+5$, а потом найти $\left(g(x)\right)^4$. В подобных случаях говорят, что задана ***сложная функция f(g(x))***. В нашем примере $u=g(x)=3x+5$, а $y=f(u)=u^4$.

Задание 1. ***Составить сложную функцию f(g(x)), если u = g(x) = lnx, f(u) =*** $\sqrt{u}$ **.**

___

Задание 2. ***Из каких функций составлена сложная функция:***

а) $y=\ln(5x^2+10)$

___

б) $y=\sin x^2$

___

в) $y=tg^5(2x+1)$

___

Пусть y = f(g(x))– сложная функция, причем функция u = g(x) дифференцируема в точке x, а функция f(u) дифференцируема в соответствующей точке u. Тогда функция y = f(g(x)) дифференцируема в точке ч, причем

$y' =$ ______________________ .

Пример 1. Найдем производную функции $y=(2x+3)^{100}$.

Р е ш е н и е. Функцию y можно представить в виде сложной функции y = f(g(x)), где $u=g(x)=2x+3$, $y=f(u)=u^{100}$.

Так как $g'(x)=2$ и $f'(u)=100u^{99}$, имеем

$y' = 2\cdot 100u^{99} = 200(2x+3)^{99}$.

Пример 2. Найдем производную функции $y=\sqrt{3x^2+1}$.

Р е ш е н и е. Функцию y можно представить в виде сложной функции y = f(g(x)), где u=g(x)=$3x^2$+1, y=f(u)= $\sqrt{u}$.

Так как $g'(x)=6x$ и $f'(u)=\left(u^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{u}}$, имеем

$$y'=6x\cdot\frac{1}{2\sqrt{u}}=\frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}.$$

Упражнения для самостоятельного решения.

Найдите производные функций (25 – 28).

№ 25. а) $y=x^8-3x^4-x+5$; б) $y=\frac{x}{3}-\frac{4}{x^2}+\sqrt{x}$;

в) $y=x^7-4x^5+2x-1$; г) $y=\frac{x^2}{2}+\frac{3}{x^3}+1$.

№ 26. а) $y=2\ln x+3^x$; б) $3\ln x-2^x$;

в) $y=\log_2 x+\frac{1}{2x}$; г) $y=3x^{-3}-\log_3 x$.

№ 27. а) $y=\sin x+x^2$; б) $y=\frac{1}{2}\cos x-1$;

в) $y=tgx+e^x$; г) $y=ctgx-2^x$.

№ 28. а) $y=\frac{\cos x}{e^x}$; б) $y=\frac{3^x}{\sin x}$; в) $y=\ln x\cdot\cos x$; г) $y=\log_3 x\cdot ctgx$.

№ 29. Определите, из каких функций составлена сложная функция и найдите ее производную:

а) $y=(4-3x)^7$; б) $y=\frac{1}{(5x+1)^3}$; в) $y=\sqrt{1-x^4}$; г) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{3x-2}}$;

д) $y=e^{\frac{1}{10}x}$; е) $y=\ln(1-2x^5)$; ж) $y=\sin\frac{2x}{3}$; з) $y=tg\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$.

Найдите значение производной функции f(x) в точке x_0 (30 – 31).

№ 30. а) $f(x)=e^{2x-4}+2\ln x, x_0=2$; б) $f(x)=e^{3x-2}-\ln(3x-1), x_0=\frac{2}{3}$;

в) $f(x)=2^x-\log_2 x, x_0=1$; г) $f(x)=\log_{0,5} x-3^x, x_0=1$.

№ 31. а) $f(x)=\frac{1}{2}\cos(2x-\pi), x_0=\pi$; б) $f(x)=x-tg(-2x), x_0=0$;

в) $f(x)=3\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{2}\right), x_0=0$; г) $f(x)=2\cos\frac{x}{2}, x_0=\pi$.

№ 32. Найдите $f'(1)$, если:

а) $f(x)=(x-1)^8(2-x)^7$; б) $f(x)=(5x-4)^6\cdot\sqrt{3x-2}$;

в) $f(x)=\dfrac{5x}{\sqrt{2x-1}}$; г) $f(x)=\dfrac{(5-2x^2)^4}{3x}$.

№ 33. Выясните, при каких значениях x значение производной функции f(x) равно 0:

а) $f(x)=x-\cos x$; б) $f(x)=\dfrac{1}{2}x-\sin x$; в) $f(x)=2\ln(x+3)-x$;

г) $f(x)=\ln\left(x+1\right)-x$; д) $f(x)=x^2+2x-12\ln x$; е) $f(x)=x^2-6x-8\ln x$;

ж) $f(x)=(x-3)^5(2+5x)^6$.

№ 34. Выясните, при каких значениях x значение производной f(x) положительно:

а) $f(x)=e^x-x$; б) $f(x)=x\ln 2-2^x$; г) $f(x)=e^x\cdot x^2$; д) $f(x)=e^x\cdot\sqrt{x}$.

Найдите производную функции (35 – 37)

№ 35 *. а) $y=\sqrt{\dfrac{2x-1}{3}}+\ln\dfrac{2x+3}{5}$; б) $y=2e^{\frac{1-x}{3}}+3\cos\dfrac{1-x}{2}$;

в) $y=5\sin\dfrac{2x+3}{4}-4\sqrt{\dfrac{1}{x-1}}$; г) $y=6\sqrt[3]{\dfrac{1}{(2-x)^2}}+4e^{\frac{3-5x}{2}}$.

№ 36. а) $y=0{,}5^x\cdot\cos 2x$; б) $y=5\sqrt{x}\cdot e^{-x}$;

в) $y=\ln(1-3x)\cdot\sin x$; г) $y=e^{3-2x}\cdot\cos(3-2x)$.

№ 37. а) $y=\dfrac{1+\cos x}{\sin x}$; б) $y=\dfrac{\sqrt{3x}}{3^x+1}$; в) $y=\dfrac{e^{0,5x}}{\cos 2x-5}$; г) $y=\dfrac{5^{2x}}{\sin 3x+7}$.

№ 38*. Найдите значения производной функции f(x) в точках, в которых значение этой функции равно нулю:

а) $f(x)=e^{2x}\ln(2x-1)$; б) $f(x)=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x}$.

№ 39*. Вычислите $f'(x)+f(x)+2$, если $f(x)=x\sin 2x, x=\pi$.

№ 40. Найдите тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной, проходящей через данную точку M графика функции f:

а) $f(x)=2\cos x, M\left(\dfrac{\pi}{2};0\right)$; б) $f(x)=-tgx, M(\pi;0)$; в) $f(x)=1+\sin x, M(\pi;1)$;

г) $f(x)=\dfrac{18}{\sqrt{x}}, M(3;6\sqrt{3})$; д) $f(x)=e^{\frac{3x+1}{2}}, M(0;\sqrt{e})$; е) $f(x)=\ln(2x+1), M(2,\ln 5)$.

№ 41. Напишите уравнение касательной к графику функции y = f(x) в точке с абсциссой x = 0:

а) $f(x)=x-2\sqrt{x+1}$; б) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$;

в) $f(x)=e^{2x}+\sin x$; г) $f(x)=\sin 2x-\ln(x+1)$.

№ 42*. Покажите, что графики двух данных функций имеют одну общую точку и в этой точке – общую касательную; напишите уравнение этой касательной:

а) $y=x^4$ и $y=x^6+2x^2$;

б) $y=(x+2)^2$ и $y=2-x^2$.

§ 4. Исследование свойств функции с помощью производной.

<u>Применение производной к нахождению промежутков монотонности функции</u>.

Одной из важнейших задач исследования функции является нахождение промежутков ее возрастания и убывания. Такое исследование легко провести с помощью производной.

Пусть значения производной функции $y = f(x)$ положительны на некотором промежутке, т. е. $f'(x) > 0$. Тогда угловой коэффициент касательной $tg\alpha = f'(x)$ к графику этой функции в каждой точке данного промежутка положителен. Это означает, что угол между касательной и положительным направлением оси Ох – острый и поэтому функция является возрастающей на указанном промежутке (рис. 5, а)

Если $f'(x) < 0$ на некотором промежутке, то угловой коэффициент касательной $tg\alpha = f'(x)$ к графику функции $y = f(x)$ отрицателен. Это означает, что угол между касательной и положительным направлением оси Ох – тупой, т. е. функция убывает на указанном промежутке (рис. 5, б).

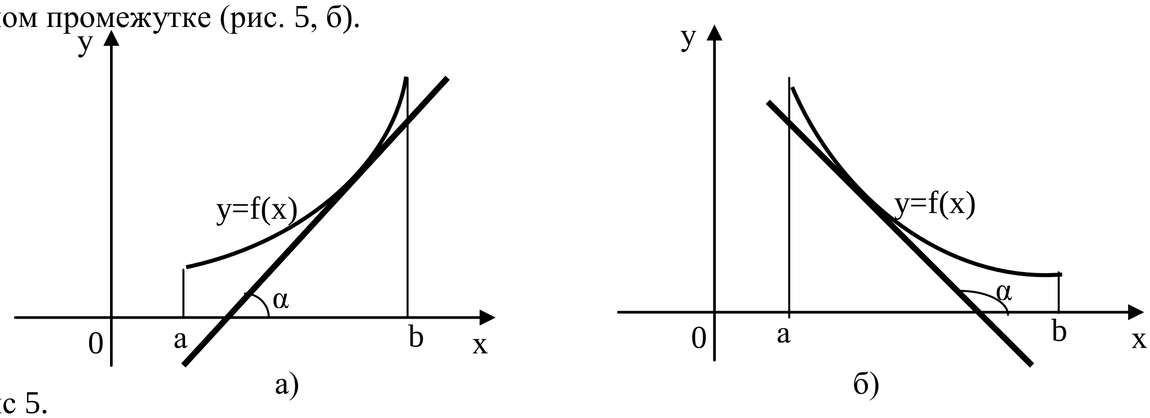


Рис 5.

Сформулируем соответствующие утверждения.

Достаточный признак возрастания функции.________________________________

____

____

Достаточный признак убывания функции.__________________________________

____

____

Пример 1. Найдем промежутки монотонности функции $f(x) = 5x^2 - 3x + 1$.

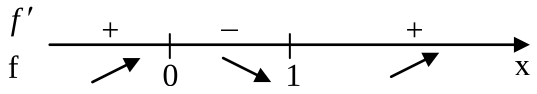
Р е ш е н и е. Данная функция определена на всей числовой прямой. Находим производную: $f'(x) = 10x - 3$. Так как $f'(x) < 0$ при $x < 0{,}3$ и $f'(x) > 0$ при $x > 0{,}3$, то в промежутке (- ∞; 0,3] функция убывает, а в промежутке [0,3; +∞) возрастает.

Замечание. Для решения неравенств $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$ удобно пользоваться обобщением метода интервалов: точки, в которых производная равна нулю или не существует, разбивают область определения функции f на промежутки, в каждом из которых f ’ сохраняет постоянный знак.

Пример 2. Найдем промежутки возрастания (убывания) функции $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x^2}$.

Р е ш е н и е. Область определения данной функции – объединение промежутков (- ∞; 0) и (0; +∞).

$f'(x) = 2 - \dfrac{2}{x^3}$; $f'(x) = 0$ при x = 1.



Точки 0 и 1 разбивают область определения функции на три интервала (- ∞; 0), (0; 1) и (1; +∞). Согласно замечанию в каждом из них производная сохраняет постоянный знак. Знак производной в каждом из этих интервалов отмечен на рис.

Следовательно, данная функция возрастает на промежутках (- ∞; 0) и [1; + ∞); убывает на промежутке (0; 1].

<u>Применение производной к исследованию функции на экстремум.</u>

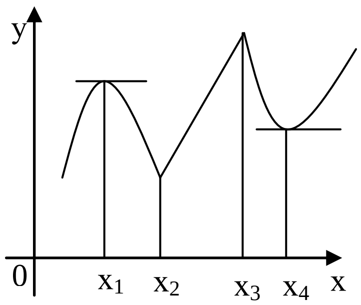


Рис. 6

Рассмотрим рис. 6.

Точки x_1, x_2, x_3, x_4 являются точками экстремума функции, график которой изображен на данном рисунке.

Заметим, что в точках x_1 и x_4 к графику функции можно провести касательные, причем эти касательные будут параллельны оси Ox, а значит:

$f'(x_1) =$ ________ и $f'(x_4) =$ ________

В точках же x_2 и x_3 к графику касательной провести нельзя, значит в этих точках производная функции ____________________________.

Критические точки функции - ____

____

____

Эти точки играют важную роль, поскольку только они могут быть точками экстремума функции. Сформулируем соответствующее утверждение, которое называют теоремой Ферма.

Необходимое условие экстремума.____

____

____

Важно отметить, что теорема Ферма есть лишь необходимое условие экстремума: из того, что x_0 – критическая точка, необязательно следует, что в этой точке функция имеет экстремум. Например,

Производная функции f(x) = x^3 обращается в ноль в точке x = 0, но экстремума в этой точке функция не имеет (рис. 7)

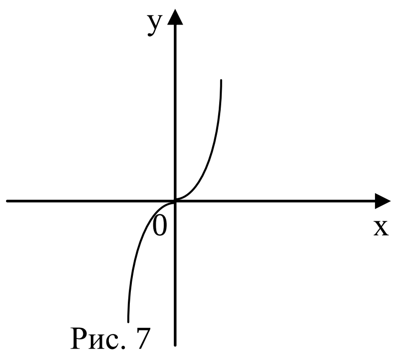


Рис. 7

Поэтому вопрос о том, действительно ли данная критическая точка есть точка экстремума, требует дополнительного исследования. При этом часто помогают достаточные условия существования экстремума функции в точке.

Достаточное условие максимума функции____________________________________

____

____

____

Достаточное условие минимума функции____________________________________

____

____

____

Пример 3. Найдем точки экстремума функции $f(x) = 3x - x^3$.

Р е ш е н и е.

1. $D(f) = R$.

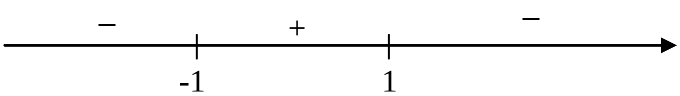
2. Производная функции: $f'(x) = 3 - 3x^2$.

3. Критические точки:

а) производная существует во всех точках области определения функции;

б) $f'(x) = 0$ при x = -1 и x = 1.

4. Критические точки разбивают область определения функции на 3 промежутка. Знаки производной на полученных промежутках отмечены на рис.



5. В точке –1 производная меняет знак с минуса на плюс. В точке 1 производная меняет знак с плюса на минус. Пользуясь признаками максимума и минимума, получаем, что точка –1 является точкой минимума, а точка 1 – точкой максимума функции.

<u>**Задание.**</u> ***Запишите алгоритм исследования функции на экстремум.***

1.____

2.____

3.____

4.____

____

5.____

____

6. ____

____

Упражнения для самостоятельного решения.

Найдите промежутки монотонности функции (43 – 47)

№ 43. а) $y = 3x + 1$; б) $y = x^2 - 2x + 5$; в) $y = 3 - \frac{1}{2}x$; г) $y = -x^2 + 2x - 3$.

№ 44. а) $y = x^3 - 27x$; б) $y = x^4 - 2x^2$; в) $y = x^2(x - 3)$; г) $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$.

№ 45. а) $y = \frac{x-3}{x}$; б) $y = 2 - \frac{4}{0{,}5x - 1}$; в) $y = 1 + 3\sqrt{x-5}$; г) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$.

№ 46. а) $y = \frac{x^3}{x^2+3}$; б) $y = (x-1)e^{3x}$; в) $y = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$; г) $y = x \cdot e^{-3x}$.

№ 47*. а) $y = x - \sin 2x$; б) $y = 3x + 2\cos 3x$.

№ 48*. При каких значениях а функция возрастает на всей числовой прямой:

а) $y = x^3 - ax$; б) $y = ax - \sin x$.

№ 49*. Докажите, что уравнение имеет единственный корень на каждом из данных промежутков P_1 и P_2:

а) $x^3 - 27x + 2 = 0$, $P_1 = [-1; 1]$, $P_2 = [4; 6]$.

б) $x^4 + 6x^2 - 8 = 0$, $P_1 = [-2; -1]$, $P_2 = [1; 2]$.

Найдите критические точки функции. Определите, какие из них являются точками максимума, а какие точками минимума (50 - 51).

№ 50. а) $f(x) = 5 + 12x - x^3$; б) $f(x) = 9 + x^2 - x^4$;

в) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4$; г) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2$.

№ 51. а) $y = \frac{x}{5} + \frac{5}{x}$; б) $y = \frac{4}{x} + \frac{x}{16}$;

в) $y = x + \sin x$; г) $y = 2\cos x + x$.

№ 52. Докажите что функция f не имеет критических точек:

а) $f(x) = \sqrt{x}$; б) $f(x) = tgx$; в) $f(x) = 3x - 7$; д) $f(x) = 3x^5 + 2x$.

№ 53. Найдите точки экстремума функции:

а) $y = x + \sqrt{3-x}$; б) $y = (x-1)^{\frac{6}{7}}$; в) $y = x - \sin 2x$; г) $y = \cos 3x - 3x$.

№ 54*. Найдите точки экстремума и значения функции в этих точках:

а) $y = \frac{x^3 + 2x^2}{(x-1)^2}$; б) $y = (x-1)e^{3x}$; в) $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$.

§ 5. Общая схема исследования функции.

Общее исследование функции и построение ее графика рекомендуется выполнять по следующей схеме:

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на четность, нечетность; периодичность.
3. Найти точки пересечения с осями координат.
4. Найти промежутки знакопостоянства функции.
5. Найти промежутки монотонности функции, точки экстремума и значения функции в точках экстремума.
6. Найти несколько дополнительных точек (при необходимости)
7. Построить график функции, используя полученные результаты исследования.

Пример 1. Исследуем функцию $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ и построим ее график.

Р е ш е н и е.

1. D(f) = ____________;

2. Функция f не является ни четной, ни нечетной, так как ______________________

____

3. а) Точки пересечения с осью абсцисс: y = 0.

Решим уравнение $x^3 - 2x^2 + x = 0$

____

____

График функции пересекает ось абсцисс в точках с координатами: (__; 0) и (__; 0)

б) Точки пересечения с осью ординат: x = 0, тогда y = ______________________.

График функции пересекает ось ординат в точке с координатами (0;__).

4. Нули функции разбивают область ее определения на ___ промежутка. Исследуем знак функции на каждом из полученных промежутков.

f ——————————————————————————→ x

Промежутки знакопостоянства: f(x) > 0 при x $\in$ ________________________________

f(x) < 0 при x $\in$ ________________________________.

5. $f'(x)$ = ____

Критические точки: ____

____

f'

f ——————————————————————————→ x

Критические точки разбивают числовую прямую на промежутки в которых производная сохраняет свой знак.

Промежутки монотонности:

функция возрастает на промежутках ______________________________________

*функция убывает на промежутке*____

Точки экструмума: *точка минимума*_________________

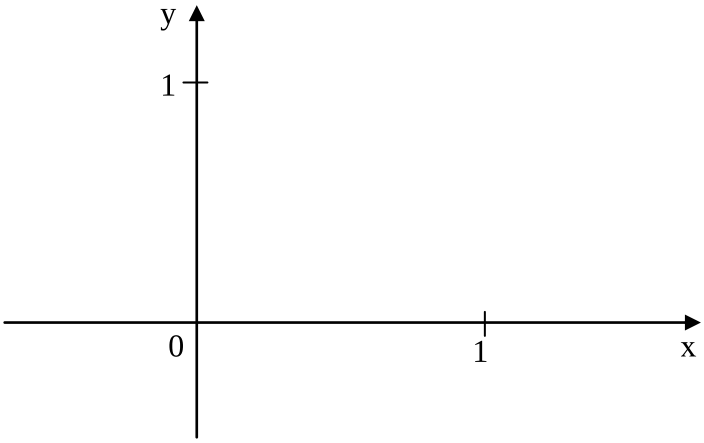
*точка максимума*__________________

Значения функции в точках экстремума: _____________________________________

Построим график функции:

Точка min

Точка max



Упражнения для самостоятельного решения.

Исследуйте функцию и постройте её график (55 – 60).

№ 55. а) $f(x)=x^2-2x+8$; б) $f(x)=-\frac{2x^2}{3}+x+\frac{2}{3}$;

в) $f(x)=-x^2+5x+4$; г) $f(x)=\frac{x^2}{4}+\frac{x}{16}+\frac{1}{4}$.

№ 56. а) $f(x)=-x^3+3x-2$; б) $f(x)=x^4-2x^2-3$;

в) $f(x)=x^3+3x+2$; г) $f(x)=3x^2-x^3$.

№ 57. а) $y=2+5x^3-3x^5$; б) $y=3x^5-5x^3$;

в) $y=4x^5-5x^4$; г) $y=\frac{1}{10}x^5-\frac{5}{6}x^3+2x$.

№ 58. а) $y=3x+\frac{1}{3x}$; б) $y=\frac{4}{x}-x$; в) $y=x+\frac{2}{\sqrt{x}}$; г) $y=x-\frac{1}{\sqrt{x}}$.

№ 59*. а) $y=\frac{x^2}{x-2}$; б) $y=\frac{-x^2+3x-1}{x}$;

в) $y=\frac{x^2+x-1}{x^2-2x+1}$; г) $y=\frac{4+x-2x^2}{(x-2)^2}$.

№ 60*. а) $y=x\sqrt{2-x}$; б) $y=2\sin x-\cos 2x$; в) $y=x^2\sqrt{x+1}$; г) $y=\sin x-0{,}5\sin 2x$

№ 61. Сколько корней имеет уравнение:

а) $4x^3-3x^2-36x-10=0$; б) $\frac{x^4}{4}-x^3-\frac{x^2}{2}+3x=0$; в) $x^4-4x^3-9=0$; г) $x^2-\frac{x^3}{3}-1=0$.

№ 62*. Постройте график функции $y=\frac{x^3-4}{(x-1)^3}$. Сколько действительных корней имеет уравнение $\frac{x^3-4}{(x-1)^3}=C$ при различных значениях С.

§ 6. Наибольшее и наименьшее значения функции.

На практике часто приходится решать задачи, в которых требуется найти наибольшее или наименьшее значение из всех тех значений, которые функция принимает *на отрезке*.

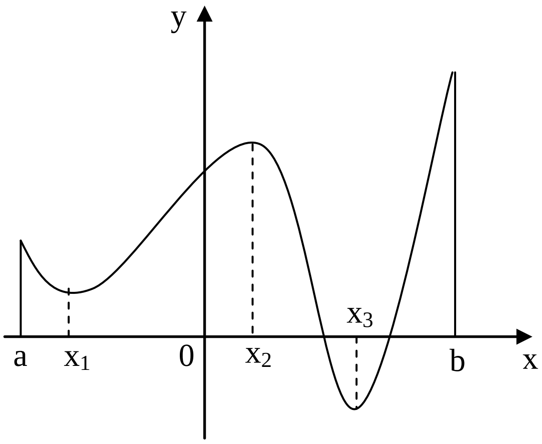


Рис. 8

На рис. 8 изображен график некоторой функции, определенной на отрезке [a; b]. В точке x_2 функция имеет максимум, а в точках x_1 и x_3 – минимумы.

Но! Своего наименьшего значения, как это видно из рисунка, функция достигает в точке x_3 – точке минимума. Наибольшее значение функция принимает на конце отрезка – в точке b, в которой функция не имеет экстремума.

Таким образом, для нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции на отрезке, нужно сравнить ее значения в точках максимума (минимума) и на концах отрезка.

Вообще пусть функция f(x) непрерывна на отрезке [a; b] и имеет производную в каждой внутренней точке этого отрезка.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции f(x) на отрезке [a; b] нужно:

1. ____
____
2. ____
____
3. ____
____

Пример 1. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 1{,}5x^2 - 6x + 1$ на отрезке [-2; 0].

Р е ш е н и е.

1. $y' = 3x^2 - 3x - 6$

$y' = 0$ при x = -1 и x = 2.

$-1 \in [-2; 0]$; $2 \notin [-2; 0]$.

2. y(-1) = 4,5; y(0) = 1; y(-2) = -1.

3.Наименьшее значение достигается в точке –2 и равно –1. Наибольшее значение достигается в точке –1 и равно 4,5.

Коротко это записывается так:

$\min\limits_{\{-2;0]} y(x) = y(-2) = -1$, $\max\limits_{\{-2;0]} y(x) = y(-1) = 4{,}5$

Данный метод поиска наибольших и наименьших значений функции применим к решению разнообразных прикладных задач. При этом действуют по следующей схеме:

1) задача «переводится» на язык функций. Для этого выбирают удобный параметр x, через который интересующую нас величину выражают как функцию f(x);

2) средствами анализа ищется наибольшее или наименьшее значение этой функции на некотором промежутке;

3) выясняется, какой практический смысл (в терминах первоначальной задачи) имеет полученный (на языке функций) результат.

Пример 2. Вписать в круг радиуса R прямоугольник наибольшей площади.

Р е ш е н и е (рис. 9).

Обозначим длину одной из сторон прямоугольника через x, тогда длина другой стороны равна $\sqrt{4R^2 - x^2}$. Заметим, что 0 < x < 2R, так как x – длина катета прямоугольного треугольника.

Площадь прямоугольника выразится равенством $S(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$.

Найдем наибольшее значение функции S(x) на отрезке [0; 2R].

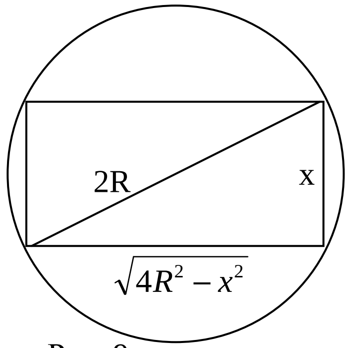


Рис. 9

1. $S'(x) = \sqrt{4R^2 - x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}}$

$S'(x) = 0$ при $4R^2 - x^2 = 0$, откуда $x = \pm R\sqrt{2}$

(очевидно, значение $x = -R\sqrt{2}$ не удовлетворяет условию).

2. S($R\sqrt{2}$) = 2R^2;   S(0) = 0;   S(2R) = 0.

3. $\max\limits_{[0;2R]} S(x) = S(R\sqrt{2}) = 2R^2$.

Следовательно, длина одной стороны прямоугольника равна $R\sqrt{2}$. При этом длина другой стороны прямоугольника равна $\sqrt{4R^2 - (R\sqrt{2})^2} = R\sqrt{2}$.

Таким образом, искомым прямоугольником служит квадрат.

Упражнения для самостоятельного решения.

№ 63. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

а) $y = x^4 - 8x^2 - 9$ на отрезке [-1; 1];

б) $y = \dfrac{x^2 + 4}{x}$ на отрезке [1; 3];

в) y=0,5sin3x на отрезке [0; π];

г) $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$ на отрезке [0; 2];

д) $y = x - \sqrt{x}$ на отрезке [0; 4];

е) $y = 2\sin x + \sin 2x$ на отрезке $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

№ 64. Сравните наибольшее значение функции на промежутке P_1 и наименьшее ее значение на промежутке P_2:

а) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$; P_1 = [-4; 0], P_2 = [3; 4]

б) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$; $P_1 = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, P_2 = [2; 3]

№ 65. Материальная точка движется по прямой согласно закону $s(t) = 12t^2 - \frac{2}{3}t^3$, где s(t) – путь в метрах и t – время в секундах. В какой момент времени из промежутка [4; 10] скорость движения точки будет наибольшей, и какова величина этой скорости.

№ 66. Сумма двух целых чисел равна 24. Найдите эти числа, если известно, что их произведение принимает наибольшее значение.

№ 67. Число 12 представьте в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

№ 68. Нужно огородить участок прямоугольной формы забором длиной 240 м. Каковы должны быть размеры этого прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей.

№ 69. Для стоянки машин выделили площадку прямоугольной формы, примыкающую одной стороной к стене здания. Площадку обнесли с трех сторон металлической сеткой длиной 200 м, и площадь ее при этом оказалась наибольшей. Каковы размеры площадки?

№ 70. В степи, в 9 км к северу от шоссе, идущего с запада на восток, находится поисковая партия. В 15 км к востоку от ближайшей к поисковой партии точки, лежащей на шоссе, находится райцентр. Поисковая партия отправляет курьера – велосипедиста в райцентр. Каков должен быть маршрут следования курьера, чтобы он прибыл в райцентр в кратчайший срок, если известно, что по степи он едет со скоростью 8 км/ч, а по шоссе – 10 км/ч.

№ 71. Лодка находится на озере на расстоянии 3 км от ближайшей точки А берега. Пассажир лодки желает достигнуть села В, находящегося на берегу на расстоянии 5 км от А (участок АВ берега считаем прямолинейным). Лодка движется со скоростью 4 км/ч, а пассажир, выйдя из лодки, может в час пройти 5 км. К какому пункту берега должна пристать лодка, чтобы пассажир достиг села в кратчайшее время?

№ 72. Найдите число, сумма которого со своим квадратом принимает наименьшее значение.

№ 73. Докажите, что из всех прямоугольных треугольников с заданной гипотенузой наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник.

РАЗДЕЛ 6. ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

§1. Неопределенный интеграл.

Первообразная функции.

Напомним, что основная задача дифференциального исчисления заключается в следующем: дана некоторая функция, требуется найти ее производную.

Однако часто приходится решать и обратную задачу: найти функцию по заданной ее производной.

Для решения обратной задачи служит операция *интегрирования*, обратная операции дифференцирования.

Определение. **Функция F называется первообразной для функции f на заданном промежутке, если** ____

____

Например,

функция F(x) = sin x является первообразной для функции f(x) = cos x на всей числовой прямой, так как ____

функция $F(x)=\frac{x^4}{4}$ является первообразной для функции $f(x)=x^3$ на всей числовой прямой, так как ____

Основное свойство первообразных: ____

____

____

Задание. ***Докажите, что функции*** $\frac{x^3}{3}$***;*** $\frac{x^3}{3}+1$***;*** $\frac{x^3}{3}-4$ ***являются первообразными для одной и той же функции f(x) =*** x^2***. Сделайте вывод.***

____

____

____

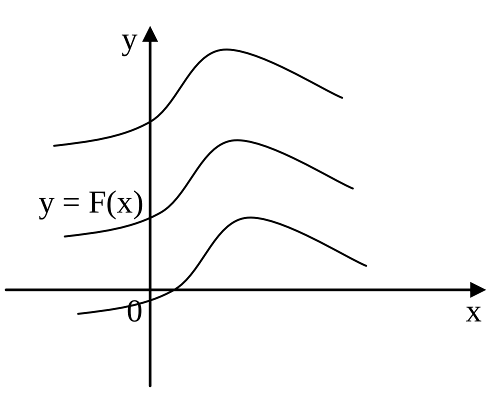


Рис. 10

Геометрическая интерпретация основного свойства первообразных:

____

____

____

____

____

____

Пример. Для функции f(x) = x найдем такую первообразную, график которой проходит через точку (2; 5).

Р е ш е н и е. Все первообразные функции f(x) = x находятся по формуле $F(x) = \frac{x^2}{2} + C$, так как $F'(x) = x$. Найдем число C, такое, чтобы график функции $y = \frac{x^2}{2} + C$ проходил через точку (2; 5). Подставляя x = 2, y = 5, получаем $5 = \frac{2^2}{2} + C$, откуда C = 3. Следовательно, $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3$.

Понятие неопределенного интеграла.

Рассмотрим сначала понятие дифференциала функции.

Дифференциалом функции f называется произведение производной функции на приращение аргумента. Для обозначения дифференциала используется символ df.

Таким образом, $df = f'(x) \cdot \Delta x$.

Заменяя обозначение Δx на dx, последнее равенство можно записать так:

$df = f'(x)dx$.

Отсюда, $f'(x) = \frac{df}{dx}$.

Применяя понятие дифференциала функции, равенство $F'(x) = f(x)$ (где F(x) – первообразная функции f(x)) записывается следующим образом:

$dF(x) = f(x)dx$.

Неопределенным интегралом от функции f(x) называется ______________________

____

Обозначение: $\int f(x)dx$=__________, где

f(x) - ____;

f(x)dx - ____;

символ $\int$ - ____.

Например, найдем $\int x^5 dx$. Так как $x^5 = \left(\frac{x^6}{6}\right)'$, то функция $F(x) = \frac{x^6}{6}$ является одной из первообразных для функции $f(x) = x^5$. Поэтому $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$.

<u>Таблица основных интегралов</u>.

Из определения неопределенного интеграла следует, что если $F'(x) = f(x)$, то $\int f(x)dx = F(x) + C$. Исходя из этого и используя формулы дифференцирования, можно составить таблицу неопределенных интегралов.

1. $\int dx =$______________;	6. $\int \sin x dx =$______________;
2. $\int x^{\alpha} dx =$______________; (для α ≠ -1)	7. $\int \cos x dx =$______________;
3. $\int \frac{dx}{x} =$______________;	8. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx =$______________;
4. $\int e^x dx =$______________;	9. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx =$______________.
5. $\int a^x dx =$______________;	

Докажите формулу 5.

____

____

Правила вычисления неопределенных интегралов.

1. $\int af(x)dx =$ ______________________________ .

*Словесная формулировка:*____

____

Например, $\int 3\cos x dx = 3\int \cos x dx = 3\sin x + C$.

2. $\int (f(x) \pm g(x))dx =$ ______________________________ .

*Словесная формулировка:*____

____

Например, $\int (2x+3)dx = \int 2xdx + \int 3dx = 2\int xdx + 3\int dx = 2\frac{x^2}{2} + 3x + C = x^2 + 3x + C$.

<u>Методы интегрирования.</u>

1. Непосредственное интегрирование.

Под непосредственным интегрированием понимают такой способ интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применением правил вычисления неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Пример 1. Вычислим $\int (2\sqrt{x} + 3\sin x - 2^x + \frac{\cos x}{3})dx$.

Р е ш е н и е.

$$\int (2\sqrt{x} + 3\sin x - 2^x + \frac{\cos x}{3})dx = \int 2\sqrt{x}dx + \int 3\sin xdx - \int 2^x dx + \int \frac{\cos x}{3}dx =$$

$$= 2\int x^{\frac{1}{2}}dx + 3\int \sin xdx - \int 2^x dx + \frac{1}{3}\int \cos xdx = 2 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2} + 3\cdot(-\cos x) - \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{1}{3}\sin x + C =$$

$$= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - 3\cos x - \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{1}{3}\sin x + C$$

***2. Интегрирование методом замены переменной (методом подстановки)*.**

Вычислить заданный интеграл непосредственно удается не всегда. В этих случаях применяют другие приемы интегрирования. Одним из наиболее эффективных приемов является метод подстановки или замены переменной интегрирования. Сущность этого метода заключается в том, что путем введения новой переменной удается свести заданный интеграл к новому интегралу, который сравнительно легко берется непосредственно.

Формула замены переменной в неопределенном интеграле имеет вид:

____

Пример 2. Вычислим $\int (3x-5)^7 dx$.

Р е ш е н и е.

Сделаем подстановку t = 3x – 5. Тогда dt = 3dx, откуда $dx = \frac{dt}{3}$. Следовательно,

$$\int (3x-5)^7 dx = \int t^7 \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int t^7 dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^8}{8} + C = \frac{1}{24}t^8 + C.$$

Заменив t его выражением из подстановки, получим

$$\int (3x-5)^7 dx = \frac{1}{24}(3x-5)^8 + C.$$

Замечание. Данный интеграл может быть вычислен и другим способом.

Если функция имеет вид $f(kx+b)$, где k и b – произвольные постоянные, то

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C.$$

***Упражнения для самостоятельного решения*.**

№ 74. Покажите, что функция F(x) является первообразной функции f(x) на указанном промежутке:

а) $F(x) = \frac{x^6}{6}, f(x) = x^5, x \in (-\infty;+\infty)$; б) $F(x) = \frac{1}{x^2} + 3, f(x) = -\frac{2}{x^3}, x \in (-\infty;0)$;

в) $F(x)=x^3+2, f(x)=3x^2$; г) $F(x)=1+\sqrt{x}, f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}, x\in(0;+\infty)$;

д) $F(x)=3e^{\frac{x}{3}}, f(x)=e^{\frac{x}{3}}, x\in(-\infty;+\infty)$; е) $F(x)=1+\sin 2x, f(x)=2\cos 2x, x\in(-\infty;+\infty)$.

№ 75. Является ли функция F первообразной для функции f на указанном промежутке:

а) $F(x)=3-\sin x,\ f(x)=\cos x,\ x\in(-\infty;+\infty)$;

б) $F(x)=5-x^4,\ f(x)=-4x^3,\ x\in(-\infty;+\infty)$;

в) $F(x)=\cos x-4,\ f(x)=-\sin x,\ x\in(-\infty;+\infty)$;

г) $F(x)=x^{-2}+2,\ f(x)=\dfrac{1}{2x^3},\ x\in(0;+\infty)$;

д) $F(x)=\dfrac{1}{x},\ f(x)=-\dfrac{1}{x^2},\ x\in(-2;2)$.

№ 76. Найдите одну из первообразных для функции f на R.

а) $f(x)=3{,}5$; б) $f(x)=\cos x$; в) $f(x)=-2x$; г) $f(x)=-\sin x$.

№ 77. Для функции f(x) найдите первообразную, график которой проходит через точку M:

а) $f(x)=x^2, M(1;2)$; б) $f(x)=x, M(-1;3)$;

в) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}, M(1;1)$; г) $f(x)=\sqrt{x}, M(9;10)$;

д) $f(x)=\cos x, M(90^0;0)$; е) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}, M\left(\dfrac{\pi}{4};0\right)$.

№ 78. Среди трёх данных функций укажите такую, что две другие являются соответственно производной и первообразной для нее:

а) $f(x)=\dfrac{1}{x^2},\ g(x)=-\dfrac{1}{x},\ h(x)=-\dfrac{2}{x^3}$;

б) $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-\cos x,\ g(x)=1+\cos x,\ h(x)=x+\sin x$;

в) $f(x)=1,\ g(x)=1+\cos x,\ h(x)=\dfrac{x^2}{2}+2x$;

г) $f(x)=3-2\sin x,\ g(x)=3x+2\cos x,\ h(x)=-2\cos x$.

Вычислите неопределенный интеграл (79 – 88):

№ 79. а) $\int 4xdx$; б) $\int -3dx$; в) $\int x^6dx$; г) $\int 24x^5dx$.

№ 80. а) $\int (x+2)dx$; б) $\int \left(3x^2+1\right)dx$; в) $\int (2-x^4)dx$;

г) $\int (x+\cos x)dx$; д) $\int \left(\frac{1}{x^3}-2\right)dx$; е) $\int \left(\frac{1}{x^2}-\sin x\right)dx$.

№ 81. а) $\int \left(\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}\right)dx$; б) $\int \left(4\sqrt[3]{x}-6\sqrt{x}\right)dx$;

в) $\int \left(2-x^3+\frac{1}{x^3}\right)dx$; г) $\int \left(x-\frac{2}{x^5}+\cos x\right)dx$

№ 82. а) $\int (3\cos x-4\sin x)dx$; б) $\int (5\sin x+2\cos x)dx$;

в) $\int (e^x-2\cos x)dx$; г) $\int (3e^x-\sin x)dx$;

д) $\int (5-e^{-x}+3\cos x)dx$; е) $\int (1+3e^x-4\cos x)dx$;

ж) $\int \left(6\sqrt[3]{x}-\frac{2}{x}+3e^x\right)dx$; з) $\int \left(\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x}-2e^{-x}\right)dx$.

№ 83. а) $\int \frac{2x^4-4x^3+x}{3}dx$; б) $\int (1+2x)(x-3)dx$;

в) $\int \frac{6x^3-3x+2}{5}dx$; г) $\int (2x-3)(2+3x)dx$.

№ 84. а) $\int (2x-3)^5 dx$; б) $\int 3\sin 2x dx$; в) $\int (4-5x)^7 dx$; г) $\int \left(-\frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)dx$

№ 85. а) $\int \frac{2}{(4-15x)^4}dx$; б) $\int \frac{2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}x\right)}dx$; в) $\int \frac{5}{\sqrt{2x+7}}dx$; г) $\int 2^{0,5x+1}dx$.

№ 86*. а) $\int \left(e^{2x}-\cos 3x\right)dx$; б) $\int \left(2\sin\frac{x}{5}-5e^{2x+\frac{1}{3}}\right)dx$;

в) $\int \left(\sqrt[3]{\frac{x}{4}}-3\cos(6x-1)\right)dx$; г) $\int \left(\frac{4}{\sqrt{3x+1}}-\frac{3}{2x-5}\right)dx$.

№ 87*. а) $\int \left(1-\cos 3x+2\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)dx\right)$; б) $\int \left(\frac{1}{\sin^2 4x}+\frac{1}{\sqrt{2-x}}-3x^2\right)dx$;

в) $\int \left(\frac{2}{\cos^2(3x+1)}-3\sin(4-x)+2x\right)dx$; г) $\int \left(\frac{1}{(3-2x)^3}+\frac{2}{\sqrt{5x-2}}-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)dx$.

№ 88*. а) $\int \frac{5x^4dx}{3+4x^5}$; б) $\int x^2(3+2x^3)^4 dx$;

в) $\int \cos^5 x\sin x dx$; г). $\int \frac{2\sin x\, dx}{\sqrt{3+\cos x}}$

§ 2. Определенный интеграл.

<u>Понятие определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.</u>

Пусть функция F(x) является первообразной функции f(x) в некотором промежутке, а числа a и b принадлежат этому промежутку.

Определенным интегралом от а до b функции f(x) называется ___________________

____

Обозначение: $\int\limits_a^b f(x)dx$, где

a - ____;

b - ____;

отрезок [a; b] - ____;

f(x) - ____.

По определению,

$\int\limits_a^b f(x)dx =$ _________________________________ .

Эту формулу называют *формулой Ньютона-Лейбница*.

Таким образом, *чтобы вычислить определенный интеграл* $\int\limits_a^b f(x)dx$, нужно:

1) найти какую-нибудь первообразную F(x) для функции f(x) (найти неопределенный интеграл от функции f(x), в котором можно принять C = 0);

2) в полученном выражении подставить вместо x сначала верхний предел b, а затем нижний предел a, и из результата первой подстановки вычесть результат второй.

Для удобства записи приращение первообразной *F(b) – F(a)* сокращенно обозначается так: $F(x)\Big|_a^b$.

Например, $\int\limits_{-1}^{2} x^3 dx = \dfrac{x^4}{4}\Bigg|_{-1}^{2} = \dfrac{2^4}{4} - \dfrac{(-1)^4}{4} = 4 - \dfrac{1}{4} = 3\dfrac{3}{4}$.

<u>Основные свойства определенного интеграла.</u>

Для определенного интеграла выполняются свойства аналогичные свойствам неопределенного интеграла.

Пример 1.

$$\int\limits_0^{\pi/4} \frac{3dx}{\cos^2 x} = 3\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = 3tgx\Big|_0^{\pi/4} = 3(tg\frac{\pi}{4} - tg0) = 3$$

Сформулируйте соответствующее свойство 1: ______________________________

____

____ и

запишите его формулой____

Пример 2.

$$\int_0^1 (x+x^3)dx = \int_0^1 xdx + \int_0^1 x^3dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 + \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \left(\frac{1}{2}-0\right)+\left(\frac{1}{4}-0\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Сформулируйте соответствующее свойство 2: ________________________________

____

____ и

запишите его формулой____

Сформулируйте свойство 3: ____

____

____

Сформулируйте свойство 4: ____

____

____

Сформулируйте свойство 5: ____

____

____

<u>Метод замены переменной в определенном интеграле.</u>

Формула замены переменной в определенном интеграле имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \qquad \textbf{где } \varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b.$$

Пример 3. Вычислим интеграл $\int_{\pi/2}^{\pi} \cos(2x+\frac{\pi}{4})dx$.

Р е ш е н и е.

Сделаем подстановку $t = 2x + \frac{\pi}{4}$. Тогда $dt = 2dx$, откуда $dx = \frac{dt}{2}$.

Вычислим новые пределы интегрирования:

x	$\pi/2$	π
t	$5\pi/4$	$9\pi/4$

Значит,

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \cos(2x+\frac{\pi}{4})dx = \int_{5\pi/4}^{9\pi/4} cost\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int_{5\pi/4}^{9\pi/4}\cos tdt = \frac{1}{2}\sin t\Big|_{5\pi/4}^{9\pi/4} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{9\pi}{4} - \sin\frac{5\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Упражнения для самостоятельного решения.

№ 89. Докажите справедливость равенства:

а) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int\limits_0^1 dx$; б) $\int\limits_0^{\pi/3} \sin x dx = \int\limits_{1/16}^{1/4} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

в) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x dx = \int\limits_0^{\sqrt[3]{3}} x^2 dx$; г) $\int\limits_0^1 (2x+1)\,dx = \int\limits_0^2 \left(x^3-1\right)dx$.

Вычислите определенный интеграл (90 – 95):

№ 90. а) $\int\limits_0^1 x dx$; б) $\int\limits_0^3 x^2 dx$; в) $\int\limits_{-1}^2 3x^2 dx$; г) $\int\limits_{-2}^3 2x dx$;

д) $\int\limits_2^3 \frac{1}{x^2} dx$; е) $\int\limits_1^2 \frac{1}{x^3} dx$; ж) $\int\limits_1^4 \sqrt{x} dx$; з) $\int\limits_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

№ 91. а) $\int\limits_1^e \frac{1}{x} dx$; б) $\int\limits_0^{\ln 2} e^x dx$; в) $\int\limits_{-\pi}^{2\pi} \cos x dx$; г) $\int\limits_{-2\pi}^{\pi} \sin x dx$.

№ 92. а) $\int\limits_{-3}^2 (2x-3)dx$; б) $\int\limits_{-2}^{-1} (5-4x)dx$; в) $\int\limits_{-1}^2 (1-3x)^2 dx$;

г) $\int\limits_{-1}^1 (x^2+1)dx$; д) $\int\limits_{-2}^{-1} (6x^2+2x-10)dx$; е) $\int\limits_0^2 (3x^2-4x+5)dx$.

№ 93. а) $\int\limits_0^4 (x-3\sqrt{x})dx$; б) $\int\limits_1^9 \left(2x-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$; в) $\int\limits_1^2 \frac{5x-2}{\sqrt[3]{x}}dx$; г) $\int\limits_1^3 \frac{3x-1}{\sqrt{x}} dx$.

№ 94. а) $\int\limits_0^2 e^{3x} dx$; б) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi} \cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)dx$; в) $\int\limits_0^2 (1+2x)^3 dx$;

г) $\int\limits_0^5 \frac{6}{\sqrt{3x+1}} dx$; д) $\int\limits_1^2 \frac{3}{2x-1} dx$; е) $\int\limits_0^{\pi/12} (1+\cos 2x)dx$.

№ 95*. а) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cos x dx$; б) $\int\limits_0^{\pi/4} \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)dx$; в) $\int\limits_0^{\pi} \left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)dx$.

№ 96*. Найти все числа b > 1, для которых выполняется равенство $\int\limits_1^b (b-4x)dx \ge 6-5b$.

§ 3. Приложения определенного интеграла.

Геометрический смысл определенного интеграла.

Криволинейной трапецией называется ____

____

____

____

____

Задание. ***Определите, какие из фигур, изображенных на рис. 11 являются криволинейными трапециями.***

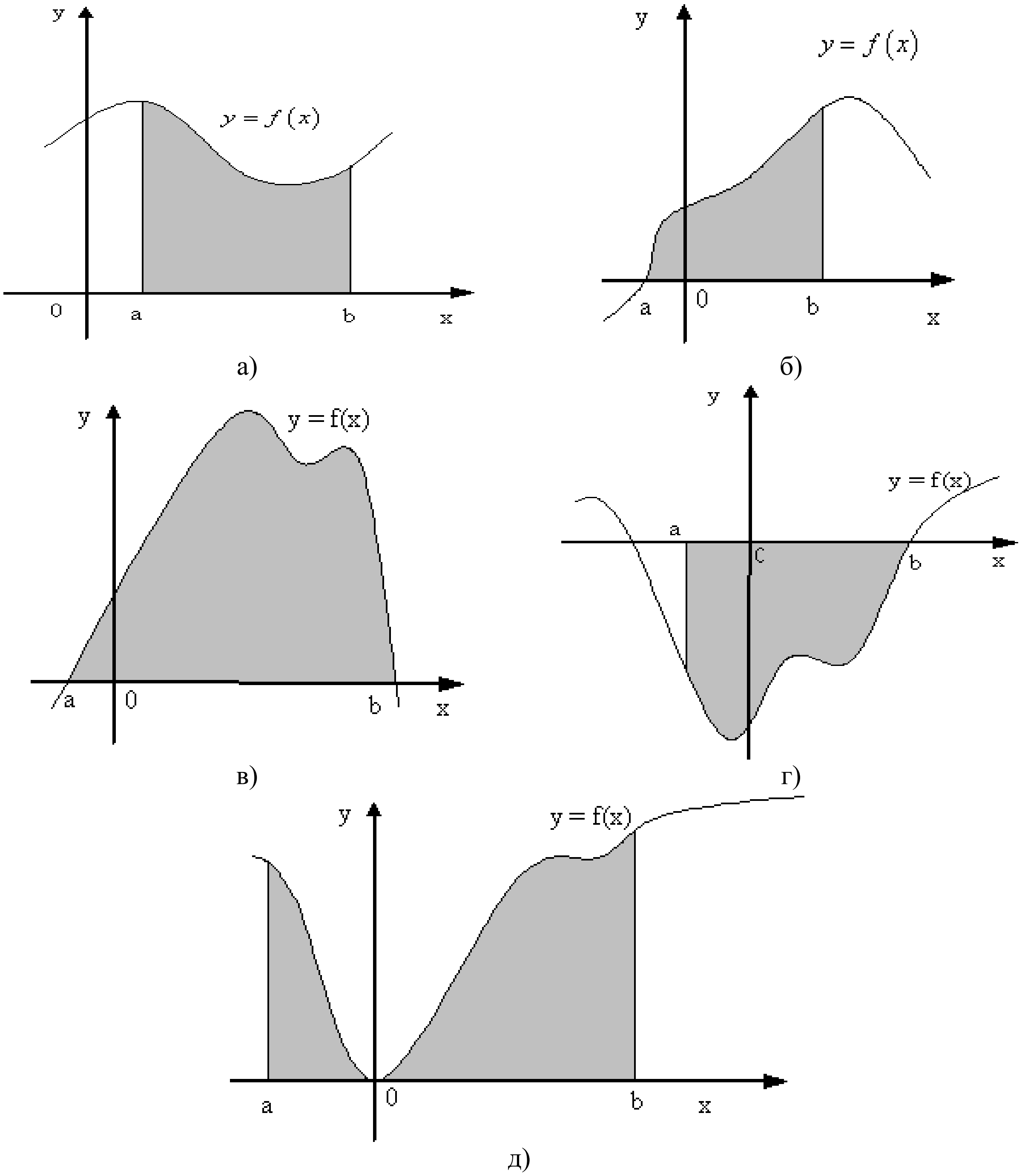
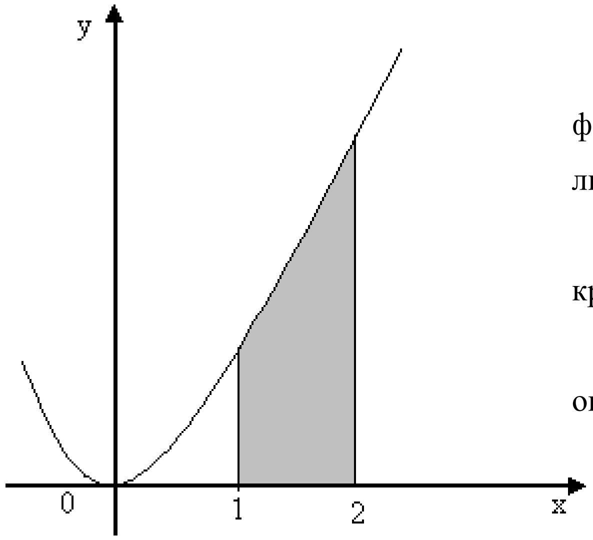


Рис. 11

Геометрический смысл определенного интеграла заключается в следующем: если функция f непрерывна и неотрицательна на отрезке [a; b], то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f(x), осью абсцисс и прямыми x = a и x = b.

Пример 1. Вычислим площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, прямыми $y = 0$, $x = 1$ и $x = 2$.



Р е ш е н и е.

Изобразим на координатной плоскости фигуру, ограниченную указанными линиями (рис. 12)

Данная фигура является криволинейной трапецией.

Согласно геометрическому смыслу определенного интеграла:

$$S = \int_1^2 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$$

Рис. 12

<u>Применение интеграла к вычислению площадей плоских фигур.</u>

1. Пусть функция непрерывна и неотрицательна на отрезке [a; b]. Тогда площадь соответствующей криволинейной трапеции (рис. 13) находится по формуле

$S =$ ______________________ .

2. В том случае, когда непрерывная функция $f(x) \le 0$ на отрезке [a; b], для вычисления площади соответствующей фигуры (рис. 14) следует использовать формулу

$S =$ ______________________ .

3. Пусть функция f(x) непрерывна на отрезке [a; b] и принимает на этом отрезке как положительные, так и отрицательные значения. Тогда нужно разбить отрезок [a; b] на такие части, в каждой из которых функция не изменяет свой знак, затем вычислить по приведенным выше формулам соответствующие этим частям площади и эти площади сложить. Например, площадь фигуры, изображенной на рис.15 равна

$S =$ ______________________ .

4. Площадь фигуры, ограниченной графиками двух непрерывных функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и двумя прямыми x = a и x = b, где $f_1(x) \geq f_2(x)$ на отрезке [a; b] (рис. 16), находится по формуле

$$S = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} .$$

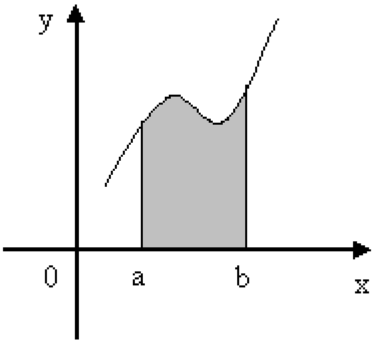


Рис. 13

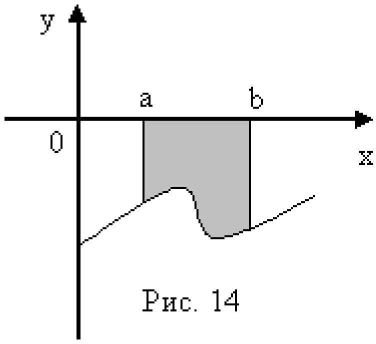


Рис. 14

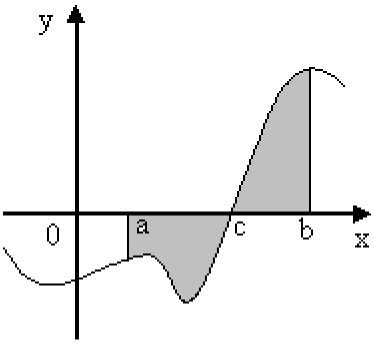


Рис. 15

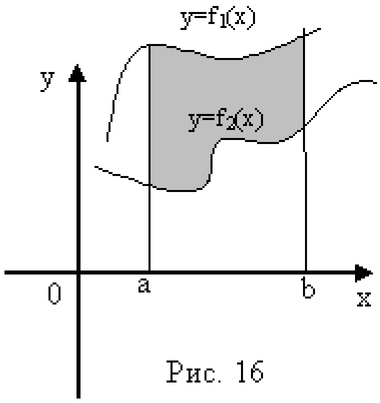


Рис. 16

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4x - x^2$, $y = 0$ и $x = 5$.

Р е ш е н и е. Парабола $y = 4x - x^2$ пересекает ось абсцисс в точках $x = 0$ и $x = 4$. Фигура, площадь которой необходимо найти, изображена на рис. 17. Пусть S_1 и S_2 – площади частей этой фигуры, соответствующие отрезкам [0; 4] и [4; 5], а S – искомая площадь, тогда $S = S_1 + S_2$.

$$S_1 = \int_0^4 (4x - x^2)dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3},$$

$$S_2 = -\int_4^5 (4x - x^2)dx = \left(-2x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_4^5 = \left(\frac{125}{3} - 50\right) - \left(\frac{64}{3} - 32\right) = \frac{7}{3}.$$

Следовательно, $S = \frac{32}{3} + \frac{7}{3} = 13$.

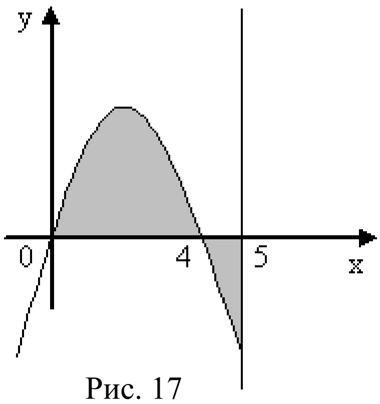


Рис. 17

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \dfrac{6}{x}$ и $y = 7 - x$ (рис. 18).

Р е ш е н и е.

Найдем точки пересечения графиков заданных функций: $\dfrac{6}{x} = 7 - x$, $x^2 - 7x + 6 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 6$.

Так как $7 - x \geq \dfrac{6}{x}$ для любого x из отрезка [1; 6], то искомая площадь равна:

$$S = \int_1^6 \left(7 - x - \frac{6}{x}\right)dx = \left(7x - \frac{x^2}{2} - 6\ln x\right)\Bigg|_1^6 =$$
$$= 17{,}5 - 6\ln 6 \approx 6{,}75$$

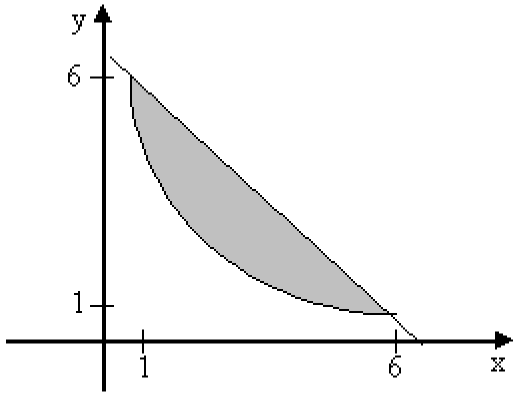


Рис. 18

Применение интеграла для решения математических задач.

1. ***Нахождение площадей плоских фигур.***
2. ***Нахождение объемов тел вращения.***

Применение интеграла для решения физических задач.

Определенный интеграл широко применяется не только при вычислении различных геометрических величин, но и при решении ряда физических задач.

3. ***Работа переменной силы***.

Работа, совершаемая переменой силой f(x) по перемещению материальной точки из положения x = a в положение x = b, вычисляется по формуле $A = \int_a^b f(x)dx$.

Пример 4. Сила упругости пружины, растянутой на 5 см, равна 3 Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на 5 см?

Р е ш е н и е.

По закону Гука сила F, растягивающая пружину на величину x, вычисляется по формуле F = kx, где k – постоянный коэффициент пропорциональности. Из условия задачи следует, что $3 = k \cdot 0{,}05$. Значит, $k = 60$ и сила $F = 60x$.

По формуле вычисления работы переменной силы,

$$A = \int_0^{0{,}05} 60x dx = 30x^2\Big|_0^{0{,}05} = 0{,}075 \text{ Дж.}$$

4. ***Путь, пройденный телом.***

Если v(t) – скорость прямолинейно движущейся точки в момент времени t, то перемещение точки, т. е. приращение ее координаты, за промежуток времени [a; b] равно:

$$x = \int_a^b v(t)dt.$$

Если $v(t) \geq 0$ на промежутке [a; b], то интеграл $\int_a^b v(t)dt$ равен пути, пройденному точкой.

Пример 5. Скорость движения тела задана уравнением $v = 3t^2 + 2t - 1$ (в м/с). Найти путь, пройденный телом за 10 с от начала движения.

Р е ш е н и е.

По формуле вычисления пути, пройденного телом, получим:

$$S = \int_0^{10} (3t^2 + 2t - 1)dt = \left(t^3 + t^2 - t\right)\Big|_0^{10} = 1090 \text{ м.}$$

5. Нахождение давления жидкости.

Упражнения для самостоятельного решения.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями (97 - 101)

№ 97. а) $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 3$; б) $y = \cos x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}$

в) $y = \sin x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \pi$; г) $y = \frac{1}{x^2}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2$.

№ 98. а) $y = x^3 + 1, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2$; б) $y = 1 + 2\sin x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}$;

в) $y = 4 - x^2, y = 0$; г) $y = 1 + \frac{1}{2}\cos x, \quad y = 0, \quad x = -\frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{\pi}{2}$.

№ 99. а) $y = x^2 - 4x + 5, \quad y = 5$; б) $y = x^2 - 4x + 4, \quad y = 4 - x^2$;

в) $y = x^2 - 2x + 2, \quad y = 2 + 6x - x^2$; г) $y = x^2, \quad y = 2x - x^2$; д) $y = x^2, \quad y = x^3$.

№ 100. а) $y = x^2 - 4x + 6, y = 2, x = 4$, x = 0; б) $y = x^2, y = \frac{1}{x^2} y = 0, x = 2, x \geq 0$;

в) $y = -e^x, x = 0, x = \ln 0{,}5, y = 0$; г) $y = \sqrt{x}, y = (x-2)^2$, осью Ох.

№ 101*. а) $y = 1, y = \frac{1}{x}, x = 0, x = e, y = 0$; б) $y = 3^x, y = 2^x, x = 1$;

в) $y = \sin x, y = 2\sin x, x = \frac{5\pi}{4}, x = 0$; г) $y = \sqrt{x}, y = |x - 2|$.

№ 102. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = 8x - 2x^2$, касательной к этой параболе в её вершине и прямой x=0

№ 103. Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 10$ и касательными к этой параболе, проведенными из точки (0; 1).

№ 104. Пружина растягивается на 0,02 м под действием силы в 60 Н. Какую работу она производит, растягивая ее на 0,12 м?

№ 105. Силой в 80 Н пружина растягивается на 2 см. Первоначальная длина пружины равна 15 см. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть ее до 20 см?

№ 106. Скорость движения тела задана уравнением $v = 6t^2 + 4$ м/с. Найдите путь, пройденный за 5 с от начала движения.

№ 107. Скорость движения тела в момент времени t задается формулой $v = 15 - 3t$ м/с. Какой путь пройдет тело от начала отсчета времени до остановки?

№ 108. Два тела начали двигаться в один и тот же момент из одной точки в одном направлении по прямой. Одно тело двигалось со скоростью $v = 6t^2 + 2t$ м/с, другое – со скоростью $v = 4t + 5$ м/с. На каком расстоянии они будут друг от друга через 5 с?

<u>РАЗДЕЛ 7. МНОГОГРАННИКИ И ПЛОЩАДИ ИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ</u>

§1. Многогранники.

Многогранником называется тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников (рис.19)

Многогранник называется ***выпуклым***, если он расположен по одну сторону плоскости каждого многоугольника на его поверхности (рис. 19, а, б). Общая часть такой плоскости и поверхности многогранника называется ***гранью***. Стороны граней многогранника называются ***ребрами***, а вершины – ***вершинами многогранника***.

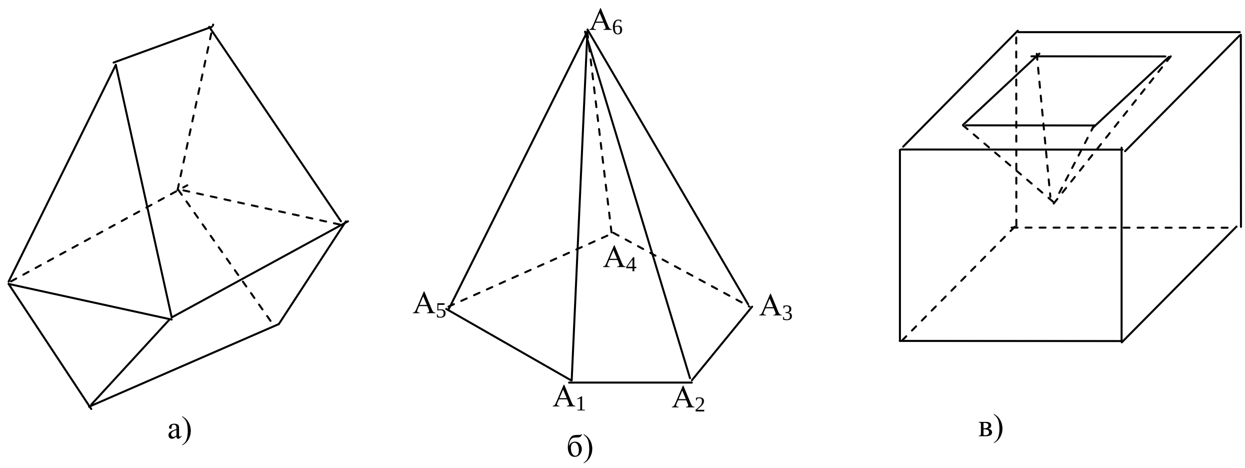


Рис. 19

<u>Призма.</u>

Рассмотрим два равных многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$ и $B_1B_2 \ldots B_n$, расположенных в параллельных плоскостях α и β так, что отрезки A_1B_1, A_2B_2, …, A_nB_n, соединяющие соответственные вершины многоугольников параллельны (рис. 20). Каждый из n многоугольников $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, …, $A_nA_1B_1B_n$ является параллелограммом.

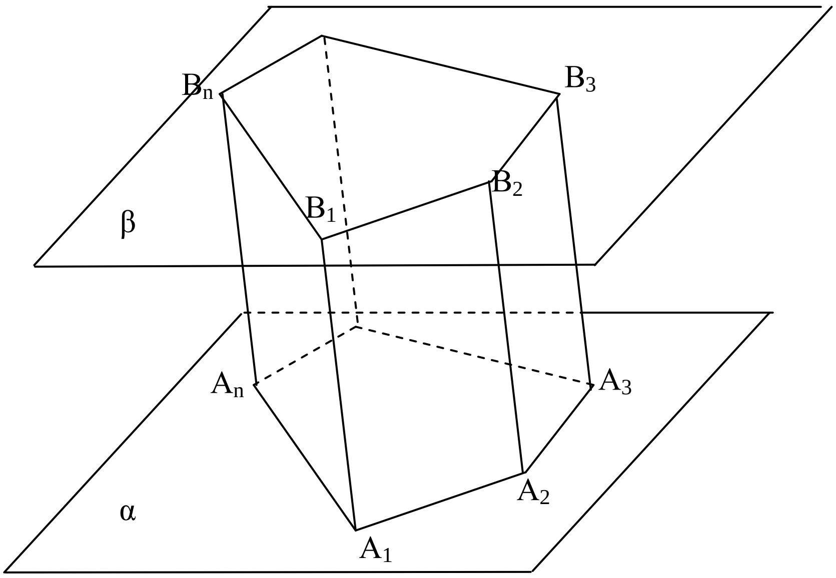


Рис. 20

Призмой называется ____

____

____

Многоугольники $A_1A_2\ldots A_n$ и $B_1B_2\ldots B_n$ - ______________________________

Параллелограммы $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, …, $A_nA_1B_1B_n$ - ______________________

Отрезки A_1B_1, A_2B_2, …, A_nB_n - ____________________________________

Призму с основаниями $A_1A_2\ldots A_n$ и $B_1B_2\ldots B_n$ обозначают $A_1A_2\ldots A_nB_1B_2\ldots B_n$ и называют *n-угольной призмой*

Высотой призмы называется ______________________________________

____

Диагональю призмы называется ____________________________________

____

Диагональным сечением призмы называется __________________________

____

<u>**Задание.**</u> ***На рис. 20 изобразите высоту, диагональ и диагональное сечение призмы.***

Призма называется ***прямой***, если____________________________________

____

В противном случае призма называется ***наклонной.***

Призма называется ***правильной,*** если _________________________________

____

Пример 1. Боковое ребро наклонной призмы равно 15 см и наклонено к плоскости основания под углом 30^0. Найдите высоту призмы.

Р е ш е н и е (рис. 21).

B_1O – высота призмы. По условию, $BB_1 = 15$ см, $\angle B_1BO = 30^0$.

Треугольник B_1OB является прямоугольным. B_1O – катет, лежащий против угла в 30^0, значит,

$$B_1O = \frac{1}{2}BB_1 = 7{,}5 \text{ см}$$

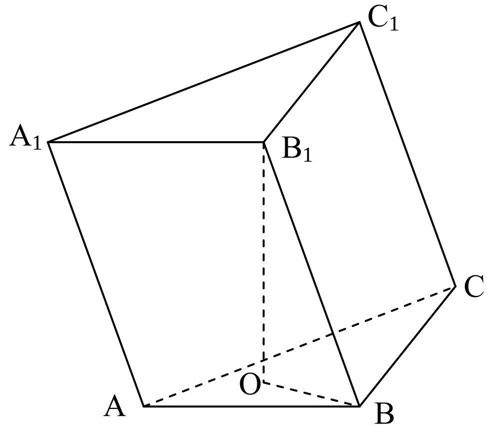


Рис. 21

Параллелепипед и его свойства.

Параллелепипедом называется ____

____

На рис 22. изображен наклонный параллелепипед, а на рис 23. – прямой параллелепипед.

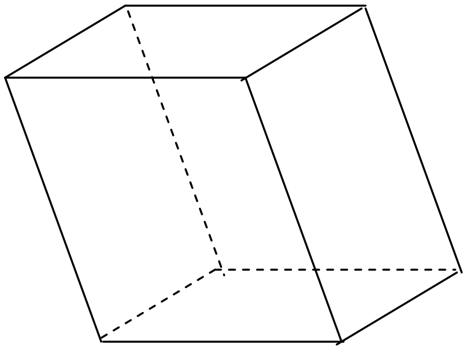


Рис. 22

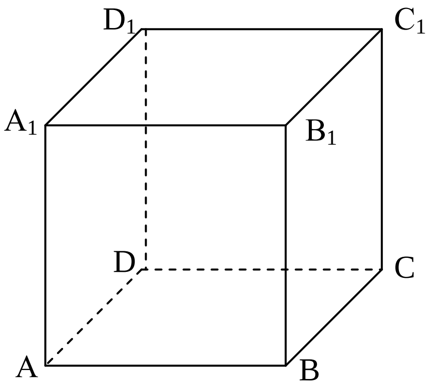


Рис. 23

Противолежащими гранями параллелепипеда называются ___________________________

____

Задание. ***Перечислите пары противолежащих граней параллелепипеда, изображенного на рис. 23.***

____

____

____

Свойства параллелепипеда.

1.*Свойство противолежащих граней параллелепипеда* ___________________________

____

____

2. *Свойство диагоналей параллелепипеда* ______________________________________

____

____

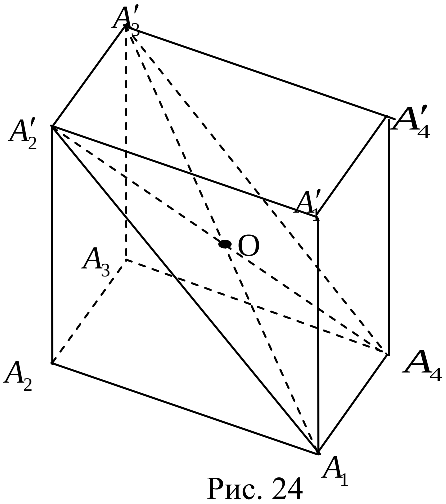


Рис. 24

Таким образом, точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его *центром симметрии* (рис. 24).

Пример 2. В прямом параллелепипеде стороны основания 3 см и 5 см, а одна из диагоналей основания 4 см. Найдите большую диагональ параллелепипеда, зная, что меньшая диагональ образует с плоскостью основания угол 60^0.

Р е ш е н и е (рис. 25). Найдем вторую диагональ основания. Так как основанием служит параллелограмм, а у параллелограмма сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов его сторон, то вторая диагональ основания равна $\sqrt{2\cdot 3^2+2\cdot 5^2-4^2}=\sqrt{52}>4$.

Боковое ребро параллелепипеда равно $4\text{tg}60^0 = 4\sqrt{3}$

Большая диагональ параллелепипеда равна $\sqrt{(\sqrt{52})^2+(4\sqrt{3})^2}=10$ (см)

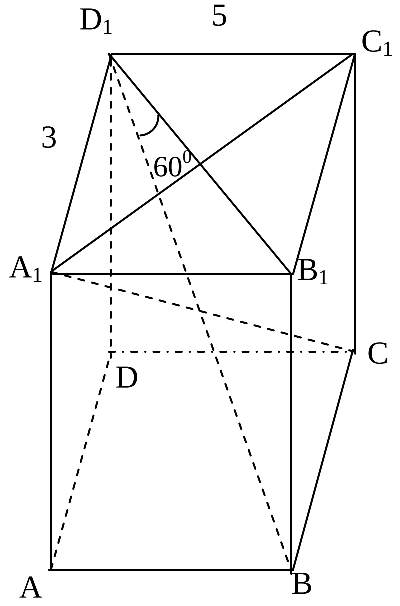


Рис. 25

Прямоугольным параллелепипедом называется ______________________________________

____

Кубом называется ____

____

Линейные размеры параллелепипеда____

____

Справедлива следующая формула: $AC'^2 = CC'^2 + AB^2 + BC^2$ (рис. 26)

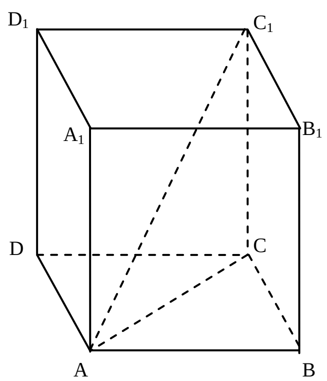


Рис. 26

Доказательство:

____

____

____

____

____

Словесная формулировка____

____

____

<u>Пирамида</u>.

Рассмотрим многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ и точку S, не лежащую в плоскости этого многоугольника. Соединив точку S с вершинами многоугольника, получим n треугольников (рис. 27):

SA_1A_2, SA_2A_3, …, SA_nA_1

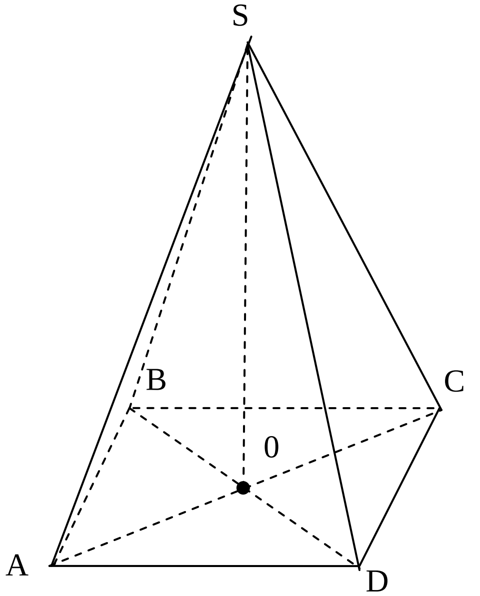


Рис. 27

Пирамидой называется ____

____

____

Многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ - ____

Треугольники SA_1A_2, SA_2A_3, …, SA_nA_1 - ______________________________

Точка S - ______________________________

Отрезки SA_1, SA_2, …, SA_n - ____

Пирамиду с основанием $A_1A_2\ldots A_n$ и вершиной S обозначают S $A_1A_2\ldots A_n$ и называют *n-угольной пирамидой*

Высотой пирамиды называется ____

____

<u>Задание.</u> ***На рис. 27 изобразите высоту пирамиды.***

Пример 3. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см. Каждое боковое ребро пирамиды равно 13 см. Вычислите высоту пирамиды.

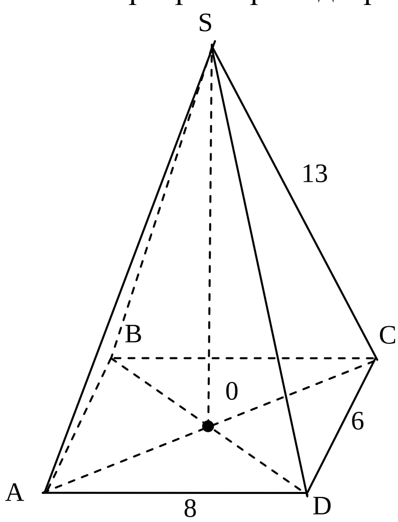


Рис. 28

Р е ш е н и е. Пусть точка O – основание высоты (рис. 28). Рассмотрим прямоугольные треугольники SOA, SOB, SOC, SOD. Они равны по гипотенузе и катету (боковые ребра пирамиды равны по условию, катет SO – общий). Следовательно, AO = BO = CO = DO. Значит, точка O равноудалена от вершин основания пирамиды, т. е. является точкой пересечения диагоналей прямоугольника ABCD.

Рассмотрим треугольник SOA. По теореме Пифагора $SO=\sqrt{SA^2-AO^2}$, где AO – половина диагонали основания пирамиды. Диагональ основания $AC=\sqrt{6^2+8^2}=10$ см. Поэтому высота пирамиды $SO=\sqrt{13^2-5^2}=12$ см

<u>Виды пирамид.</u>

1. Правильная пирамида

Пирамида называется ***правильной***, если ____

____

____

Можно доказать, что все боковые ребра правильной пирамиды равны, а боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками.

Апофемой правильной пирамиды называется_______________________________________

____

2. Усеченная пирамида

Рассмотрим произвольную пирамиду $SA_1A_2\ldots A_n$ и проведем секущую плоскость β, параллельную плоскости α основания пирамиды и пересекающую боковые ребра в точках B_1, B_2, …, B_n. (рис. 29) Плоскость β разбивает пирамиду на два многогранника.

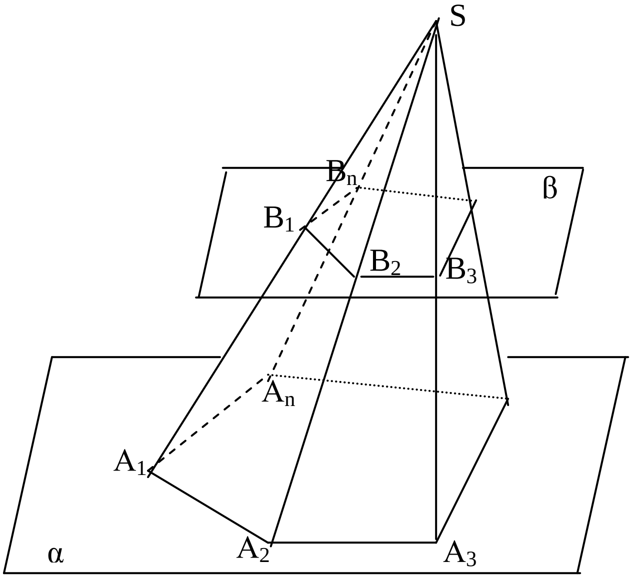


Рис. 29

Усеченной пирамидой называется ____

____

____

____

Боковые грани усеченной пирамиды являются_____________________________________

Высотой усеченной пирамиды называется ______________________________________

____

Задание. ***Проведите высоту усеченной пирамиды, изображенной на рис. 29***

3. Правильная усеченная пирамида

Усеченная пирамида называется ***правильной***, если ________________________________

____

____

Основаниями правильной усеченной пирамиды являются _______________________

____,

а боковые грани - ____

Упражнения для самостоятельного решения.

№ 109. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 12 см и 5 см. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол в 45^0. Найдите боковое ребро параллелепипеда.

№ 110. Боковое ребро прямого параллелепипеда равно 5 м, стороны основания равны 6 м и 8 м, а одна из диагоналей основания равна 12 м. Найдите диагонали параллелепипеда.

№ 111. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания 7 дм и 24 дм, а высота параллелепипеда 8 дм. Найдите площадь диагонального сечения.

№ 112. Через два противолежащих угла куба проведено сечение, площадь которого $64\sqrt{2}$ см^2. Найдите ребро куба и его диагональ.

№ 113. Диагональ правильной четырехугольной призмы образует с плоскостью боковой грани угол в 30^0. Найдите угол между диагональю и плоскостью основания.

№ 114. В правильной четырехугольной призме площадь основания 144 см^2, а высота 14 см. Найдите диагональ призмы.

№ 115. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AC = AB = 13$ см, $BC = 10$ см, а боковое ребро призмы образует с плоскостью основания угол в 45^0. Проекцией вершины A_1 является точка пересечения медиан треугольника ABC. Найдите площадь грани CC_1B_1B.

№ 116. Основание пирамиды – равнобедренный треугольник, у которого основание равно 12 см, а боковая сторона 10 см. Боковые грани образуют с основанием равные двугранные углы, содержащие по 45^0. Найдите высоту пирамиды.

№ 117. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с углом 120^0. Боковые ребра образуют с ее высотой, равной 16 см, углы в 45^0. Найдите площадь основания пирамиды.

№ 118. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой a. Каждое боковое ребро образует с плоскостью основания угол β. Найдите ее высоту.

№ 119. Основание пирамиды – параллелограмм, у которого стороны 3 см и 7 см, а одна из диагоналей 6 см; высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей, она равна 4 см. Найдите боковое ребро пирамиды.

№ 120. Основанием пирамиды является равнобедренная трапеция с основаниями 6 см и $4\sqrt{6}$ см и высотой 5 см. Каждое боковое ребро пирамиды равно 13 см. Найдите ее высоту.

№ 121. Основанием пирамиды является квадрат, одно из боковых ребер перпендикулярно к плоскости основания. Плоскость боковой грани, не проходящей через высоту пирамиды, наклонена к плоскости основания под углом 45^0. Наибольшее боковое ребро равно 12 см. Найдите высоту пирамиды.

№ 122. Высота треугольной пирамиды равна 40 см, а высота каждой боковой грани, проведенная из вершины пирамиды, равна 41 см. а) Докажите, что высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в ее основание. б) Найдите площадь основания пирамиды, если его периметр равен 42 см.

№ 122. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 7 см, а сторона основания – 8см. Найдите боковое ребро.

№ 123. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 6 см, а угол наклона боковой грани к плоскости основания равен 60^0. Найдите боковое ребро пирамиды.

№ 124. По данной стороне основания a и боковому ребру b найдите высоту правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

№ 125. По данной стороне основания a и высоте b найдите апофему правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

№ 126. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 7 см. Стороны оснований равны 10см и 2 см. Найдите боковое ребро пирамиды.

№ 127. Стороны оснований правильной усеченной треугольной пирамиды 4 дм и 1 дм. Боковое ребро 2 дм. Найдите высоту пирамиды.

№ 128. Стороны оснований усеченной правильной треугольной пирамиды 2 см и 6 см. Боковая грань образует с большим основанием угол 60^0. Найдите высоту.

§ 2. Площади поверхностей многогранников.

Площадь поверхности призмы.

Площадью полной поверхности призмы называется сумма площадей всех ее граней, а ***площадью боковой поверхности призмы*** – сумма площадей ее боковых граней. Площадь полной поверхности $S_{полн}$ выражается через площадь боковой поверхности $S_{бок}$ и площадь основания $S_{осн}$ призмы формулой

____

Теорема (о площади боковой поверхности прямой призмы)__________________________

____

____

Пример. Найдите боковую поверхность прямой треугольной призмы, в основании которой лежит прямоугольный треугольник с катетом 4 см и прилежащим острым углом 60^0. Боковое ребро призмы равно 5 см.

Р е ш е н и е (рис. 30).

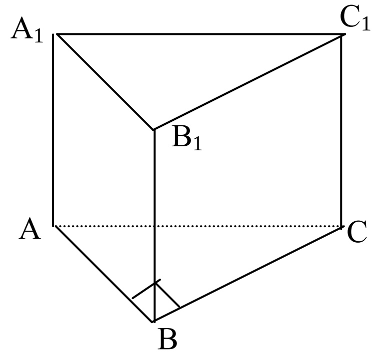


Рис. 30

AB = 4 см, $\angle CAB = 60^0$, BB_1 = 5 см.

По теореме о площади боковой поверхности прямой призмы

$S_{бок} = (AB + BC + AC)\cdot BB_1$

Так как $\angle CAB = 60^0$, то $\angle ACB = 30^0$, т. е. AB – катет, лежащий против угла в 30^0. Значит, AC = 2·AB = 8 см.

Тогда по теореме Пифагора $BC = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ см.

Следовательно, $S_{бок} = (12 + 4\sqrt{3}) \cdot 5 = 60 + 20\sqrt{3}$ см^2

Площадь поверхности пирамиды

Площадью полной поверхности пирамиды ***называется сумма площадей всех ее граней (т. е. основания и боковых граней), а*** площадью боковой поверхности пирамиды ***– сумма площадей ее боковых граней.***

$S_{полн}$ = ______________________________

Теорема (о площади боковой поверхности правильной пирамиды):____________________

____

____

Для усеченной пирамиды: $S_{полн}$ = ______________________________

Теорема (о площади боковой поверхности правильной усеченной пирамиды):__________

____

____

____

Пример. В правильной четырехугольной пирамиде боковая поверхность равна 14,76 м^2, а полная поверхность 18 м^2. Найдите сторону основания, апофему и высоту пирамиды.

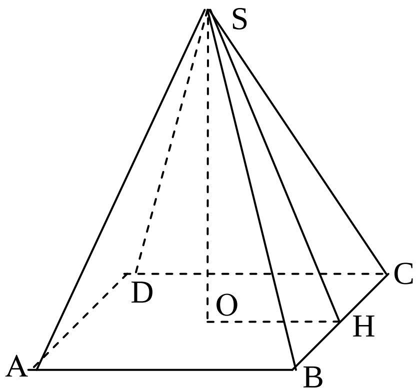


Рис. 31

Р е ш е н и е (рис. 31).

Найдем сторону основания.

Полная поверхность пирамиды равна

$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$, значит $S_{осн} = S_{полн} - S_{бок}$, т. е. $S_{осн} = 18 – 14{,}76 = 3{,}24$ м^2.

Так как пирамида правильная, то в основании лежит квадрат, т. е. АВ = $\sqrt{3{,}24} = 1{,}8$ м.

Найдем апофему.

По теореме о площади боковой поверхности правильной пирамиды $S_{бок} = p \cdot SH$, где р – полупериметр основания, SH – апофема. Тогда $SH = \dfrac{S_{бок}}{p}$.

Так как периметр основания равен 4·АВ = 7,2 м, т. е. р = 3,6 м, то $SH = \dfrac{14{,}76}{3{,}6} = 4{,}1$ м

Найдем высоту.

SO – высота пирамиды.

Рассмотрим прямоугольный треугольники SOH. По теореме Пифагора $SO = \sqrt{SH^2 - OH^2}$

По теореме о трех перпендикулярах OH $\perp$ BC, значит $OH = \dfrac{1}{2} AB = 0{,}9$ м.

Следовательно, $SO = \sqrt{4{,}1^2 - 0{,}9^2} = 4$ м.

Упражнения для самостоятельного решения.

№ 129. Основание прямой призмы – треугольник со сторонами 5 см и 3 см и углом в 120^0 между ними. Наибольшая из площадей боковых граней равна 35 см^2. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

№ 130. В прямой треугольной призме все ребра равны. Боковая поверхность равна 12 м^2. Найдите высоту.

№ 131. Боковая поверхность правильной четырехугольной призмы равна 32 м^2, а полная поверхность 40 м^2. Найдите высоту.

№ 132. По стороне основания a и боковому ребру b найдите полную поверхность правильной призмы: 1) треугольной; 2)четырехугольной; 3) шестиугольной.

№ 133. В прямом параллелепипеде стороны основания 6 м и 8 м образуют угол 30^0. Боковое ребро равно 5 м. Найдите полную поверхность этого параллелепипеда.

№ 134. В прямом параллелепипеде стороны основания 3 см и 8 см; угол между ними 60^0. Боковая поверхность равна 220 см^2. Найдите полную поверхность.

№ 135. В основании прямого параллелепипеда лежит квадрат. Площадь полной поверхности равна 81 м^2, площадь боковой поверхности равна 31 м^2. Найдите сторону основания.

№ 136. Расстояния между параллельными прямыми, содержащими боковые ребра наклонной треугольной призмы, равны 2 см, 3см и 4 см, а боковые ребра 5 см. Найдите боковую поверхность призмы.

№ 137. Основанием пирамиды является параллелограмм, стороны которого равны 20 см и 36 см, а площадь равна 360 см^2. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 12 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

№ 138. Основанием пирамиды DABC является треугольник ABC, у которого AB = AC = 13 см, BC = 10 см; ребро AD перпендикулярно к плоскости основания и равно 9 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

№ 139. Основанием пирамиды является треугольник со сторонами 12 см, 10 см и 10 см. Каждая боковая грань наклонена к плоскости основания под углом 45^0. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

№ 140. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды образует угол в 60^0 с плоскостью основания. Найдите площадь поверхности пирамиды, если боковое ребро равно 12 см.

№ 141. Найдите сторону основания и апофему правильной треугольной пирамиды, если ее боковое ребро равно 10 см, а боковая поверхность равна 144 см^2

№ 142. В правильной четырехугольной пирамиде найдите сторону основания, если боковое ребро равно 5 см, а полная поверхность 16 см^2.

№ 143. В правильной четырехугольной пирамиде радиус окружности вписанной в основание равен 5 см. Апофема наклонена к плоскости основания под углом 45^0. Найдите боковую поверхность пирамиды.

№ 144. В правильной треугольной пирамиде радиус окружности вписанной в основание равен $\sqrt{3}$ см. Апофема наклонена к плоскости основания под углом 60^0. Найдите боковую поверхность пирамиды.

№ 145. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований 8 м и 2 м. Высота равна 4 м. Найдите полную поверхность.

№ 146. Плоскость, параллельная плоскости основания правильной четырехугольной пирамиды, делит высоту пирамиды в отношении 1 : 2., считая от вершины пирамиды. Апофема полученной усеченной пирамиды равна 4 дм, а площадь ее полной поверхности равна 186 дм^2. Найдите высоту усеченной пирамиды.

№ 147. Основаниями усеченной пирамиды являются правильные треугольники со сторонами 5 см и 3 см. Одно из боковых ребер перпендикулярно к плоскости основания и равно 1 см. Найдите площадь боковой поверхности усеченной пирамиды.

№ 148. Крыша башни имеет вид правильной четырехугольной пирамиды, сторона ее основания 3 м, высота 2м. Сколько железа потребуется для покрытия этой крыши, если на перекрытие листов уйдет 20% площади поверхности крыши?

РАЗДЕЛ 8. ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ И ПЛОЩАДИ ИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 1. Цилиндр и конус

Цилиндр.

Цилиндром называется ____

____

____

____

Образующими цилиндра называются________________________________

____

____

Поверхность цилиндра состоит из:

1.____

____

2.____

Цилиндр называется ***прямым***, если ______________________________

____

В дальнейшем мы будем рассматривать только прямой цилиндр, называя его для краткости просто цилиндром.

Радиусом цилиндра называется ________________________________

____

Высотой цилиндра называется _________________________________

____

Осью цилиндра называется ____________________________________

____

На рис. 32 изображен прямой цилиндр.

Задание. ***На рис. 32 изобразите образующую, радиус, высоту и ось цилиндра.***

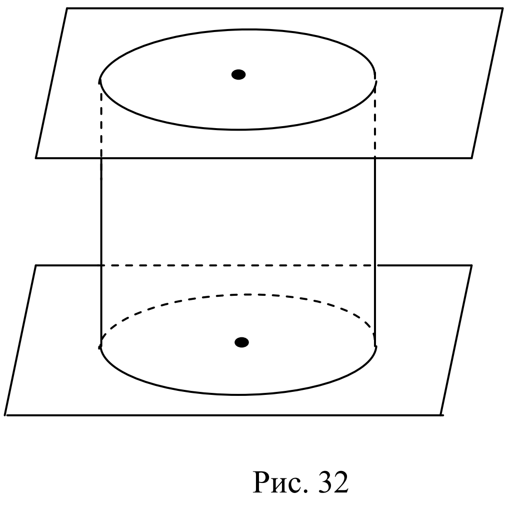


Рис. 32

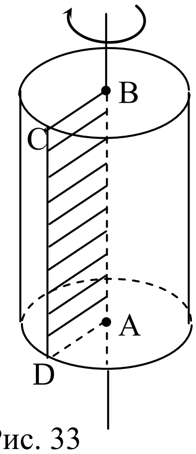


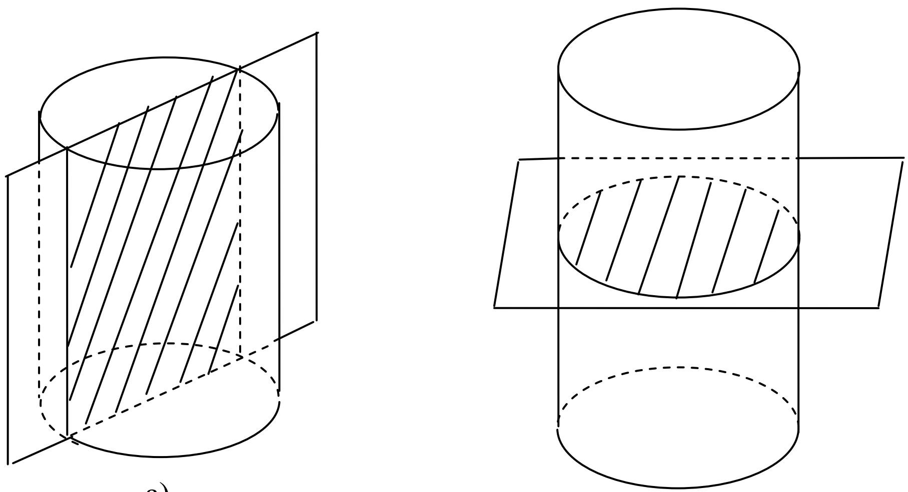
Рис. 33

Прямой цилиндр можно рассматривать как тело, полученное при вращении прямоугольника вокруг его стороны как оси. На рис. 33 изображен цилиндр, полученный вращением прямоугольника ABCD вокруг сторона AB. При это боковая поверхность цилиндра образуется вращением стороны CD, а основания – вращением сторон BC и AD.

Рассмотрим сечения цилиндра различными плоскостями.

1) Если секущая плоскость проходит через ось цилиндра, то сечение представляет собой прямоугольник, две стороны которого – образующие, а две другие – диаметры оснований цилиндра. Такое сечение называется ***осевым*** (рис. 34, а).

2) Если секущая плоскость перпендикулярна к оси цилиндра, то сечение является ***кругом*** (рис. 34, б).



а) б)

Рис. 34

Пример 1. Осевое сечение цилиндра – квадрат, площадь которого Q. Найдите площадь основания цилиндра.

Р е ш е н и е.Сторона квадрата равна диаметру основания и равна $\sqrt{Q}$, значит радиус основания равен $\frac{\sqrt{Q}}{2}$. Поэтому площадь основания цилиндра равна $\pi\left(\frac{\sqrt{Q}}{2}\right)^2 = \frac{\pi Q}{4}$.

<u>Площадь поверхности цилиндра.</u>

Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту цилиндра.

$S_{áîê} =$ ____________________

Площадью полной поверхности цилиндра называется сумма площадей боковой поверхности и двух оснований.

$S_{ïîë}$ = ____

<u>Конус.</u>

Конусом называется ____

____

____

____

Образующими конуса называются____

____

Поверхность конуса состоит из:

1.____

2.____

Конус называется ***прямым***, если ____

____

В дальнейшем мы будем рассматривать только прямой конус, называя его для краткости просто конусом.

Радиусом конуса называется ____

____

Высотой конуса называется ____

____

Осью конуса называется ____

На рис. 35 изображен конус.

<u>Задание.</u> ***На рис. 35 изобразите образующую, радиус, высоту и ось конуса.***

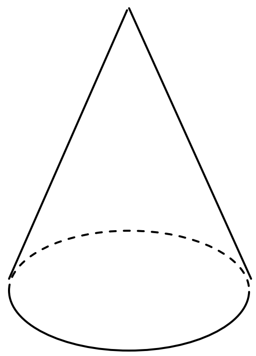


Рис. 35

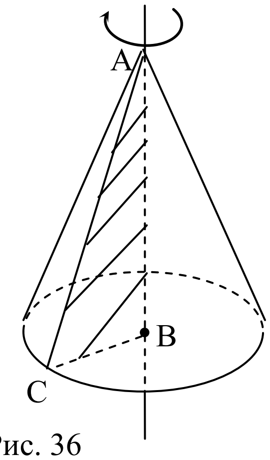


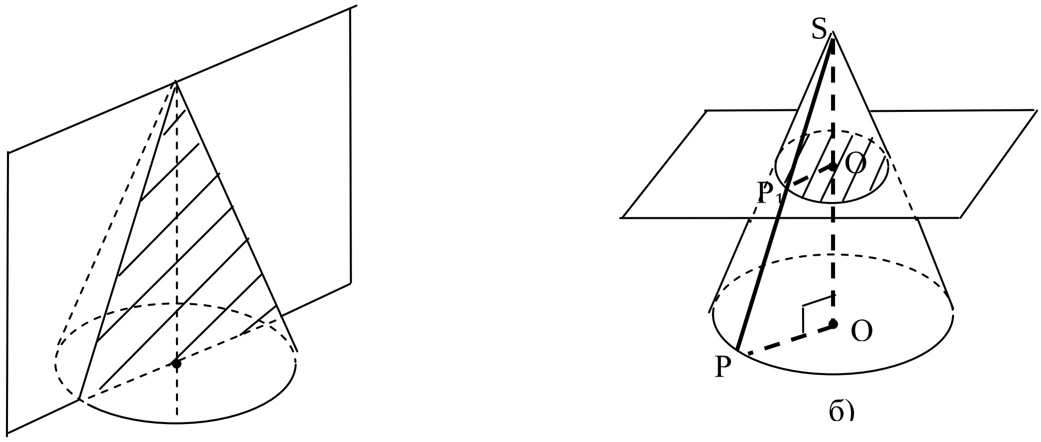
Рис. 36

Прямой конус можно рассматривать как тело, полученное вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов. На рис. 36 изображен конус, полученный вращением прямоугольного треугольника ABC вокруг катета AB. При этом боковая поверхность конуса образуется вращением гипотенузы AC, а основание – вращением катета BC.

Рассмотрим сечения конуса различными плоскостями.

1) Если секущая плоскость проходит через ось конуса, то сечение представляет собой равнобедренный треугольник, основание которого – диаметр основания конуса, а боковые стороны – образующие конуса. Это сечение называется ***осевым*** (рис. 37, а).

2) Если секущая плоскость перпендикулярна к оси конуса, то сечение конуса представляет собой ***круг*** (рис. 37, б).



а) Рис. 37 б)

Пример. Основанием конуса с вершиной S является круг радиуса r с центром в точке O. Конус пересечен плоскостью, перпендикулярной оси. В сечении - круг радиуса r_1 с центром в точке O_1. Докажите, что $r_1 = \frac{SO_1}{SO} r$.

Д о к а з а т е л ь с т в о (рис. 37, б).

$PO = r$, $P_1O_1 = r_1$.

Рассмотрим прямоугольные треугольники POS и P_1O_1S. Они подобны, так как имеют общий угол S. Из подобия треугольников следует, что $\frac{SO_1}{SO} = \frac{P_1O_1}{PO}$.

Значит, $r_1 = \frac{SO_1}{SO} r$. Что и требовалось доказать.

Площадь поверхности конуса.

Площадь боковой поверхности конуса равна произведению половины длины окружности основания на образующую.

$S_{áîê}$ = ____________________

Площадью полной поверхности конуса называется сумма площадей боковой поверхности и основания.

$S_{ïîëí}$ = ____

Усеченный конус.

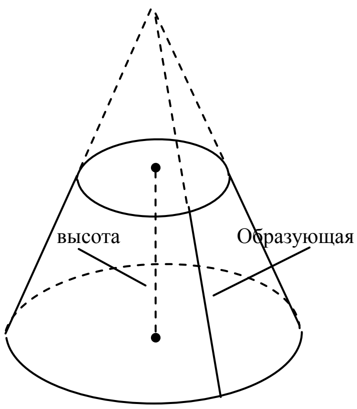


Рис. 38

Возьмем произвольный конус и проведем секущую плоскость, перпендикулярную к его оси. Эта плоскость пересекается с конусом по кругу и разбивает конус на две части. Одна из частей представляет собой конус, а другая называется ***усеченным конусом*** (рис. 38). Снование исходного конуса и круг, полученный в сечении, называются ***основаниями*** усеченного конуса, а отрезок, соединяющий их центры – ***высотой*** усеченного конуса***.*** Отрезки образующих исходного конуса, заключенные между основаниями, называются ***образующими*** усеченного конуса.

Усеченный конус может быть получен вращением прямоугольной трапеции вокруг ее боковой стороны, перпендикулярной к основаниям (рис. 39).

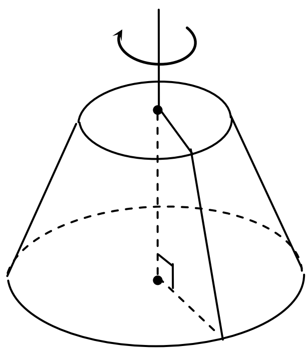


Рис. 39

Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна произведению полусуммы длин окружностей оснований на образующую.

$S_{áîê}$ = ____________________

Площадью полной поверхности усеченного конуса называется сумма площадей боковой поверхности и двух оснований.

$S_{ïîëí}$ = ____

Упражнения для самостоятельного решения.

№ 149. Радиус основания цилиндра 2 м, высота 3 м. Найдите диагональ осевого сечения.

№ 150. Высота цилиндра 6 см, радиус основания 5 см. Найдите площадь сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 4 см от нее.

№ 151. Высота цилиндра 8 дм, радиус основания 5 дм. Цилиндр пересечен плоскостью так, что в сечении получился квадрат. Найдите расстояние от этого сечения до оси.

№ 152. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 48 см. Угол между этой диагональю и образующей цилиндра равен 60^0. Найдите: а) высоту цилиндра; б) площадь основания цилиндра.

№ 153. Площадь осевого сечения цилиндра равна 10 $м^2$, а площадь основания – 5 $м^2$. Найдите высоту цилиндра.

№ 154. В равностороннем цилиндре (диаметр равен высоте цилиндра) точка окружности верхнего основания соединена с точкой окружности нижнего основания. Угол между радиусами, проведенными в эти точки, равен 60^0. Найдите угол между проведенной прямой и осью цилиндра.

№ 155. Диаметр основания цилиндра равен 1 м, высота цилиндра равна длине окружности основания. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

№ 156. Площадь боковой поверхности цилиндра S. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

№ 157. Высота цилиндра на 12 см больше его радиуса, а площадь полной поверхности равна 288π $см^2$. Найдите радиус основания и высоту цилиндра.

№ 158. Сколько квадратных метров листовой жести пойдет на изготовление трубы длиной 4 м и диаметром 20 см, если на швы необходимо добавить 2,5% площади ее боковой поверхности?

№ 159. Из заготовок, имеющих форму правильной четырехугольной призмы размером a x a x l, прокатывают круглую сталь (цилиндрической формы) диаметром d. Определите длину готового проката диаметром d=3см, если известны размеры заготовки a=12см, l=3,14м.

№ 160. Радиус основания конуса 15 см, а высота конуса равна 8 см. Найдите образующую конуса.

№ 161. Образующая конуса, равная 12 см, наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите площадь основания конуса, если 1) $\alpha = 30^0$; 2) $\alpha = 45^0$; 3) $\alpha = 60^0$.

№ 162. Осевое сечение конуса – прямоугольный треугольник. Найдите площадь этого сечения, если радиус основания конуса равен 5 см.

№ 163. Осевое сечение конуса – правильный треугольник со стороной 2r. Найдите площадь сечения, проведенного через две образующие конуса, угол между которыми равен: 1) $\alpha = 30^0$; 2) $\alpha = 45^0$; 3) $\alpha = 60^0$.

№ 164. Найдите высоту конуса, если площадь его осевого сечения равна 6 $дм^2$, а площадь основания равна 8 $дм^2$.

№ 165. Конус пересечен плоскостью, параллельной основанию на расстоянии d от вершины. Найдите площадь сечения, если радиус основания конуса равен R, а высота H.

№ 166. Высота конуса H. На каком расстоянии от вершины надо провести плоскость, параллельную основанию, чтобы площадь сечения была равна половине площади основания.

№ 167. Угол между образующей и осью конуса равен 45^0, образующая равна 6,5 см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

№ 168. Площадь осевого сечения конуса равна 0,6 $см^2$. Высота конуса равна 1,2 см. Вычислите площадь полной поверхности конуса.

№ 169. Прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см вращается вокруг меньшего катета. Вычислите площади боковой и полной поверхностей образованного при этом вращении конуса.

№ 170. Найдите образующую усеченного конуса, если радиусы оснований равны 3 см и 6 см, а высота равна 4 см.

№ 171. Радиусы оснований усеченного конуса равны R и r, где $R > r$, а образующая составляет с плоскостью основания угол в 45^0. Найдите площадь осевого сечения.

№ 172. Площади оснований усеченного конуса 4 $дм^2$ и 16 $дм^2$. Через середину высоты, проведена плоскость, параллельная основаниям. Найдите площадь сечения.

№ 173. Площадь боковой поверхности конуса равна 80 $см^2$. Через середину высоту конуса проведена плоскость, перпендикулярная к высоте. Найдите площадь боковой поверхности образовавшегося при этом усеченного конуса.

№ 174. Дана трапеция ABCD, в которой $\angle A = 90^0$, $\angle D = 45^0$, BC = 4 см, CD = $3\sqrt{2}$ см. Вычислите площади боковой и полной поверхностей усеченного конуса, образованного вращением данной трапеции вокруг стороны AB.

§ 2. Сфера и шар.

Сферой называется ____

____

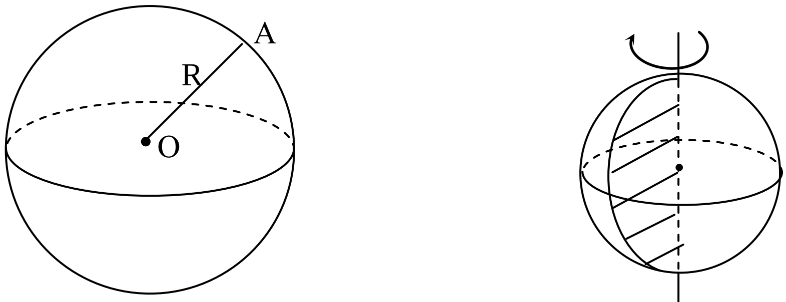
____

(рис. 40, а).

Точка O – центр сферы, OA – радиус сферы (OA = R).

Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через ее центр, называется ***диаметром сферы***. Очевидно, диаметр сферы равен 2R.

Сфера может быть получена вращением полуокружности вокруг ее диаметра (рис. 40, б).



а) Рис. 40 б)

Шаром называется ____

Центр, радиус и диаметр сферы являются также ***центром, радиусом*** и ***диаметром шара***. Очевидно шар радиуса R с центром в точке O содержит все точки пространства, которые расположены от точки O на расстоянии, не превышающим R, и не содержит других точек.

<u>Сечение шара плоскостью</u>.

Теорема. Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость (рис. 41).

$\angle OO_1A = 90^0$.

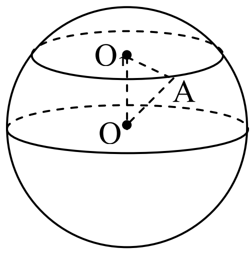


Рис. 41

Радиус круга, который получается в сечении шара плоскостью, можно вычислить по формуле:

____

____

Если плоскость, секущая шар перпендикулярно к радиусу шара и проведена через его середину, то радиус круга секущей плоскости $r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Очевидно, что *плоскости, равноудаленные от центра, пересекают шар по равным кругам.*

Круг в сечении плоскостью α будет тем больше, чем ближе плоскость α к центру шара, т. е. чем меньше расстояние OO_1. Наибольший круг получается в сечении плоскостью, проходящей через центр шара.

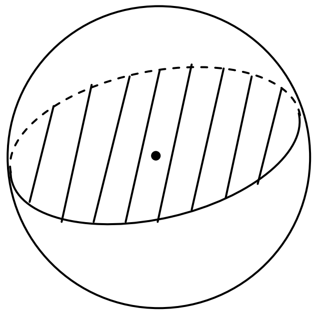


Рис. 42

Плоскость, проходящая через центр шара, называется *диаметральной плоскостью*. Сечение шара диаметральной плоскостью называется *большим кругом* (рис. 42), а сечение сферы – *большей окружностью*.

Касательная плоскость шара.

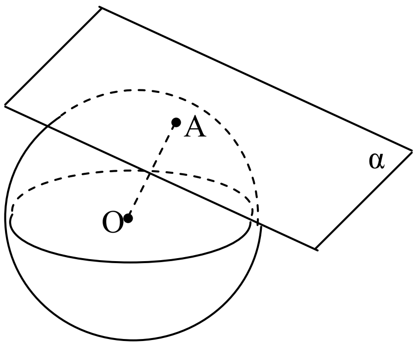


Рис. 43

Касательной плоскостью шара называется ____
____
____
____
____

(рис. 43)

Теорема. Радиус шара, проведенный в точку касания, перпендикулярен к касательной плоскости.

Касательной называется ____
____
____

Теорема. Через любую точку шаровой поверхности проходит бесчисленное множество касательных, причем все они лежат в касательной плоскости шара.

Задание. ***Изобразите на рис. 43 несколько касательных шара.***

Пример. Шар радиуса R касается всех сторон правильного треугольника со стороной a. Найдите расстояние от центра шара до плоскости треугольника.

Р е ш е н и е. Пусть A, B, C – точки касания шара со сторонами треугольника (рис. 44). Опустим из центра O шара перпендикуляр OO_1 на плоскость треугольника. Отрезки OA, OB, OC перпендикулярны сторонам. По теореме о трех перпендикулярах отрезки O_1A, O_1B, O_1C тоже перпендикулярны соответствующим сторонам треугольника.

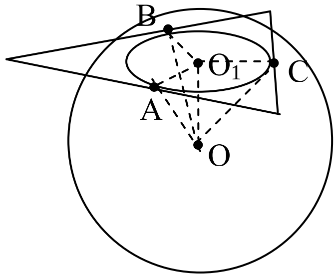


Рис. 44

Из равенства прямоугольных треугольников OO_1A, OO_1B, OO_1C (у них катет OO_1 общий, а гипотенузы равны радиусу) следует равенство сторон: $O_1A = O_1B = O_1C$. Следовательно O_1 – центр окружности вписанной в треугольник. Радиус этой окружности равен $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. По теореме Пифагора находим искомое расстояние: $OO_1 = \sqrt{OA^2 - O_1A^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{12}}$.

Площадь сферы вычисляется по формуле:

S = ________________________

Упражнения для самостоятельного решения.

№ 175. Шар радиуса 41 дм пересечен плоскостью, находящейся на расстоянии 9 дм от центра. Найдите площадь сечения.

№ 176. Радиус шара 10. Через конец радиуса проведена плоскость под углом 60^0 к нему. Найдите площадь сечения.

№ 177. Дан шар радиуса R. Через одну точку его поверхности проведены две плоскости: первая – касательная к шару, вторая – под углом 30^0 к первой. Найдите площадь сечения.

№ 178. На поверхности шара даны три точки. Прямолинейные расстояние между ними 6 см, 8см, 10 см. Радиус шара 13 см. Найдите расстояние от центра до плоскости, проходящей через эти точки.

№ 179. Вершины треугольника ABC лежат на сфере радиуса 13 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если AB = 6 см, BC = 8 см, AC = 10 см.

№ 180. Вершины прямоугольника лежат на сфере радиуса 10 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости прямоугольника, если его диагональ равна 16 см.

№ 181. Стороны треугольника касаются сферы радиуса 5 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если его стороны равны 10 см, 10 см и 12 см.

№ 182. Все стороны ромба, диагонали которого равны 15 см и 20 см, касаются сферы радиуса 10 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости ромба.

№ 183. Расстояние от центра шара радиуса R до секущей плоскости равно d. Вычислите: а) площадь сечения, если R = 12 см, d = 8 см; б) R, если площадь сечения равна 12 $см^2$, d = 2 см.

№ 184. Через точку, делящую радиус сферы пополам, проведена секущая плоскость, перпендикулярная к этому радиусу. Радиус сферы равен R. Найдите: а) радиус получившегося сечения; б) площадь боковой поверхности конуса, вершиной которого является центр сферы, а основанием – полученное сечение.

№ 185. Секущая плоскость проходит через конец диаметра сферы радиуса R так, что угол между диаметром и плоскостью равен α. Найдите длину окружности, получившейся в сечении, если: а) $R = 2$ см, $\alpha = 30^0$; б) $R = 5$ м, $\alpha = 45^0$.

№ 186. Радиус сферы равен 112 см. Точка, лежащая на плоскости, касательной к сфере, удалена от точки касания на 15 см. Найдите расстояние от этой точки до ближайшей к ней точки сферы.

№ 187. Площадь сечения сферы, проходящего через ее центр, равна 9 см^2. Найдите площадь сферы.

№ 188. Площадь сферы равна 324 см^2. Найдите радиус сферы.

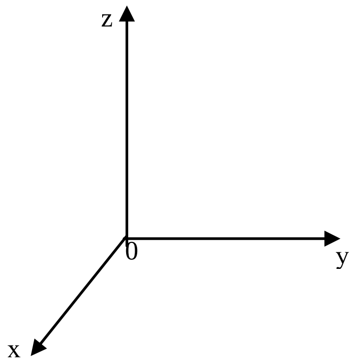
№ 189. Вычислите радиус круга, площадь которого равна площади сферы радиуса 5 м.

№ 190. Радиусы двух параллельных сечений сферы равны 9 см и 12 см. Расстояние между секущими плоскостями равно 3 см. Найдите площадь сферы.

№ 191. Сколько кожи потребуется для изготовления покрышки мяча диаметром 20 см, несли на обрезки и швы идет 5% материала?

РАЗДЕЛ 9. ВЕКТОРЫ И КООРДИНАТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ.

Система координат в пространстве.



Если через точку пространства проведены три попарно перпендикулярные прямые, на каждой из них выбрано направление и выбрана единицей измерения, то говорят, что задана ***прямоугольная система координат в пространстве*** (рис.)

Прямые с выбранными на них направлениями называются ***осями координат,*** а их общая точка – ***началом координат*** (точка О)**.**

Рис. 45

Оси координат обозначаются ___________________ и имеют названия ________________

____

Плоскости, проходящие соответственно через оси координат *Ox* и *Oy*, *Oy* и *Oz*, *Oz* и *Ox* называются ____

и обозначаются ____

Точка О разделяет каждую из осей координат на два луча. Луч, направление которого совпадает с направлением оси, называется *положительной полуосью,* а другой луч – *отрицательной полуосью.*

В прямоугольной системе координат каждой точке пространства сопоставляется тройка чисел, которые называются ее ***координатами***.

Пусть А – произвольная точка пространства. Проведем через точку А три плоскости, перпендикулярные к осям координат, и обозначим A_x, A_y, A_z точки пересечения этих плоскостей соответственно с осями абсцисс, ординат и аппликат.

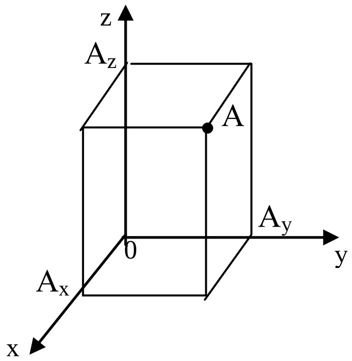


Рис. 46

Координатой x точки A называется ____

____

____

____

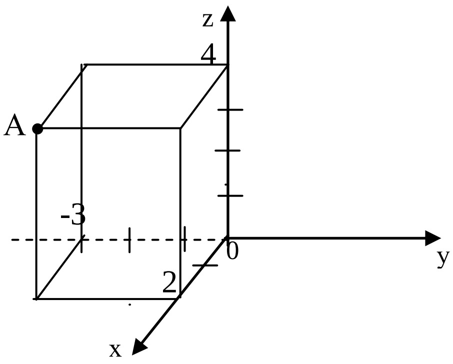
____

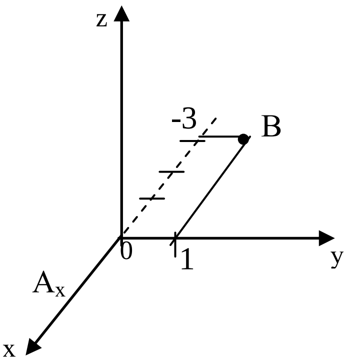
Аналогично определяются координаты ***y*** и ***z*** точки А.

Координаты точки записываются в скобках рядом с ее буквенным обозначением

________________________________.

Пример. Изобразим на координатной плоскости следующие точки: A(2, -3, 4) и B (-3, 1, 0).





Так как z=0, то точка B лежит в плоскости XOY.

__Задание.__ ***Изобразите на координатной плоскости точки C (0, 2, 5) и D (2, 4, -3).***

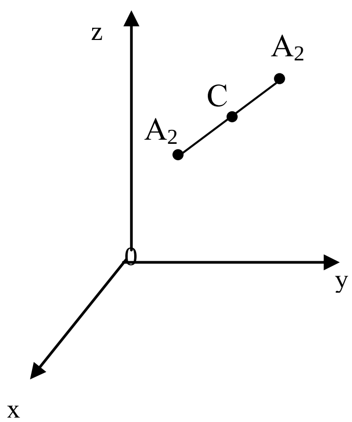


Рис. 47

Расстояние между двумя точками.

Пусть даны точки A_1 (x_1, y_1, z_1) и A_2 (x_2, y_2, z_2). Расстояние между данными точками вычисляется по формуле: $A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Координаты середины отрезка.

Пусть точка C (x, y, z) – середина отрезка A_1A_2.

Тогда координаты точки C можно вычислить по следующим формулам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Задание: ***найдите длину отрезка АВ и координаты его середины, если А(5; 8; -3) и В(7; 4; -1).***

Векторы в пространстве.

Понятие вектора.

В пространстве, как и на плоскости, ***вектором*** называется направленный отрезок (рис. 48).

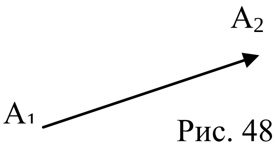


Рис. 48

Координатами вектора A_1A_2 с началом в точке A_1 (x_1, y_1, z_1) и концом в точке A_2 (x_2, y_2, z_2) называются числа x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1.

Абсолютной величиной вектора называется длина отрезка, изображающего вектор. Обозначение: $\left|\overline{A_1A_2}\right|$.

Выполняется следующее *утверждение*: равные векторы имеют равные координаты, и обратно, векторы с соответственно равными координатами равны. Поэтому любой вектор обозначают его координатами: $\overline{a}(a_1, a_2, a_3)$.

Если вектор задан своими координатами, то его абсолютную величину можно определить по формуле: $|\overline{a}| = \sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2}}$.

Задание. ***Даны четыре точки: А (2, 7, -3), В (1, 0, 3), С (-3, -4, 5) и D (-2, 3, -1). Докажите, что вектора $\overline{BC}, \overline{AD}$ равны и найдите их абсолютную величину.***

(указание – для доказательства равенства векторов необходимо сравнить их координаты).

Действия над векторами.

Суммой векторов $\overline{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\overline{b}(b_1, b_2, b_3)$ называется вектор $\overline{c}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$.

Произведением вектора $\overline{a}(a_1, a_2, a_3)$ на число λ называется вектор $\lambda\overline{a}(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$.

Скалярным произведением векторов $\bar{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\bar{b}(b_1, b_2, b_3)$ называется число $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.

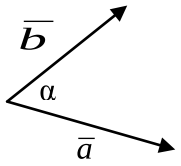


Рис. 49

Можно доказать, что скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между ними, т. е. $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\alpha$ (рис. 49).

Верно следующее *утверждение*: если скалярное произведение векторов равно 0, то эти векторы взаимно перпендикулярны.

Пример. Докажите, что векторы a=(3; 2;-3) и b=(-1; 3; 1) взаимно перпендикулярны. Постройте эти векторы.

Р е ш е н и е. Найдем скалярное произведение векторов: $\bar{a} \cdot \bar{b} = 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 = 0$. Согласно утверждению, векторы взаимно перпендикулярны.

Для построения векторов поступают следующим образом: на координатной плоскости изображают точку с координатами вектора и соединяют ее с началом системы координат (***выполните построение***).

Коллинеарность и компланарность векторов

Два вектора называются ***коллинеарными***, если ________________________________

____

Признак коллинеарности векторов. У коллинеарных векторов соответствующие координаты пропорциональны. И обратно, если у двух векторов соответствующие координаты пропорциональны, то векторы коллинеарны.

Коллинеарные вектора бывают сонаправленными или противоположно направленными.

Пример. Дан вектор $\bar{a}(1,2,3)$. Найдем коллинеарный ему вектор с началом в точке $A(1,1,1)$ и концом B на плоскости Oxy.

Р е ш е н и е. Координата *z* точки *B* равна нулю. Координаты вектора $\overline{AB}(x-1, y-1, 0-1)$.

Из коллинеарности векторов $\overline{a}$ и $\overline{AB}$ получаем пропорцию

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{-1}{3}.$$

Отсюда находим координаты *x* и *y* точки *B*:

$$x = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, $B(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$.

Векторы называются ***компланарными***, если ______________________________________

____

____

____.

Очевидно, что любые два вектора компланарны; три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, также компланарны (***объясните почему*** _____________________________

____).

Три произвольных вектора могут быть как компланарными, так и некомпланарными.

На рис 50. векторы $\overline{DD_1}$, $\overline{AC_1}$ и $\overline{AC}$ _________________, так

как ____

____.

Векторы $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ и $\overline{AA_1}$ ___________________________,

так как ____

____.

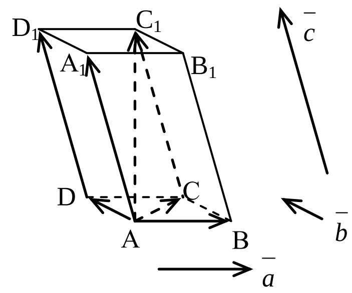


Рис. 50

Признак компланарности векторов. Если вектор $\overline{c}$ можно разложить по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, т. е. представить в виде $\overline{c} = x\overline{a} + y\overline{b}$, где x и y – некоторые числа, то векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ компланарны. Справедливо и обратное утверждение: если векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ компланарны, а векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не коллинеарны, то вектор $\overline{c}$ можно разложить по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, причем коэффициенты разложения (т. е. числа x и y) определяются единственным образом.

Правило параллелепипеда.

Для сложения трех некомпланарных векторов пользуются так называемым ***правилом параллелепипеда***.

Пусть $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ - некомпланарные векторы. Отложим от произвольной точки А пространства векторы $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AD} = \overline{b}$, $\overline{AA_1} = \overline{c}$ и построим параллелепипед так, чтобы отрезки AB, AD, AA_1 были его ребрами (рис. 50). Тогда диагональ AC_1 этого параллелепипеда изображает сумму векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$. Действительно,

$$\overline{AC_1} = \overline{AC} + \overline{CC_1} = \left(\overline{AB} + \overline{BC}\right) + \overline{CC_1} = \left(\overline{AB} + \overline{AD}\right) + \overline{AA_1} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}.$$

Разложение вектора по трем некомпланарным векторам.

Если вектор $\overline{p}$ представлен в виде $\overline{p} = x\overline{a} + y\overline{b} + z\overline{c}$, где x, y, z – некоторые числа, то говорят, что вектор $\overline{p}$ разложен по векторам $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.

Теорема. Любой вектор можно разложить по трем данным некомпланарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Упражнения для самостоятельного решения

№ 192. На оси x найдите точку C (x, 0, 0) равноудаленную от точек A (1, 2, 3) и B (-2, 1, 3).

№ 193. В плоскости *Oxy* найдите точку D(x, y, 0), равноудаленную от трех данных точек: A(0, 1, -1), B(-1, 0, 1), C(0, -1, 0).

№ 194. Докажите, что четырехугольник ABCD с вершинами в точках A(1, 3, 2), B(0, 2, 4), C(1, 1, 4), D(2, 2, 2) параллелограмм.

№ 195. Докажите, что четырехугольник ABCD с вершинами в точках A(6, 7, 8), B(8, 2, 6), C(4, 3, 2), D(2, 8, 4) ромб.

№ 196. Даны один конец отрезка A(2, 3, -1) и его середина C(1, 1, 1). Найдите координаты второго конца отрезка.

№ 197. Даны три точки: A (1, 0, 1), B (-1, 1, 2), C (0, 2, -1). Найдите точку D (x, y, z), если известно, что сумма векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равна ноль вектору $\overline{0}(0,0,0)$.

№ 198. При каких значениях m и n векторы коллинеарны: 1) $\overline{a} = (2, n, 3)$, $\overline{b} = (3, 2, m)$; 2) $\overline{a} = (m, n, 2)$, $\overline{b} = (6, 9, 3)$?

№ 199. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. а) Разложите вектор $\overline{BD_1}$ по векторам $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ и $\overline{BB_1}$. б) Разложите $\overline{B_1D_1}$ по векторам $\overline{A_1A}$, $\overline{A_1B}$ и $\overline{A_1D_1}$.

№ 200. Точка K – середина ребра BC тетраэдра ABCD. Разложите вектор $\overline{DK}$ по векторам $\overline{a} = \overline{DA}$, $\overline{b} = \overline{AB}$ и $\overline{c} = \overline{AC}$

№ 201. Точка K – середина ребра B_1C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Разложите вектор $\overline{DK}$ по векторам $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ и $\overline{AA_1}$ и найдите длину этого вектора, если ребро куба равно m.

№ 202. Даны векторы $\overline{a}(1,-2,3), \overline{b}(-1,-4,1)$. Найдите косинус угла между векторами.

№ 203. Найдите углы, периметр и площадь треугольника, вершинами которого являются точки A(1, -1, 3), B(3, -1, 1) и C(-1, 1, 3).

№ 204. При каком значении n данные векторы перпендикулярны: 1) $\overline{a}(2,-1,3), \overline{b}(1,3,n)$; 2) $\overline{a}(n,-2,1), \overline{b}(n,2n,4)$?

№ 205. Даны три точки: A(1, 0, 1), B(-1, 1, 2), C(0, 2, -1). Найдите на оси z такую точку D, чтобы векторы $\overline{ÀÂ}$ и $\overline{ÑD}$ были перпендикулярны.

№ 206. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол 60^0, а вектор $\overline{c}$ им перпендикулярен. Найдите абсолютную величину вектора $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$.

№ 207. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, в которой $AA_1 = \sqrt{2}$ AB. Найдите угол между прямыми AC_1 и A_1B.

№ 208. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M лежит на ребре AA_1, причем $AM : MA_1 = 3 : 1$, а точка N – середина ребра BC. Вычислите косинус угла между прямыми: а) MN и DD_1; б) MN и A_1C.

РАЗДЕЛ 10. ОБЪЕМЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ.

Понятие объема.

Понятие объема тела вводится по аналогии с понятием площади плоской фигуры. Из курса планиметрии известно, что каждый многоугольник имеет площадь, которая измеряется с помощью выбранной единицы измерения площадей. В качестве единицы измерения площадей берут квадрат, сторона которого равна единице измерения отрезков.

Аналогично будем считать, что каждое из рассматриваемых нами тел имеет объем, который можно измерить с помощью выбранной единицы измерения объемов. За единицу измерения объемов примем куб ребро которого равно единице измерения отрезков. Куб с ребром 1 см называют ***кубическим сантиметром*** и обозначают см^3. Аналогично определяются кубический метр (м^3), кубический миллиметр (мм^3) и т. д.

При выбранной единице измерения объем каждого тела выражается положительным числом, которое показывает, сколько единиц измерения объемов и частей единицы содержится в данном теле.

Имеют место следующие ***основные свойства объемов тел:***

1. Равные тела имеют равные объемы.
2. Если тело составлено из нескольких тел, то объем равен сумме объемов этих тел.

Объемы многогранников и тел вращения.

Объем прямоугольного параллелепипеда вычисляется по формуле

____

Объем произвольного параллелепипеда вычисляется по формуле

____

Пример. В прямом параллелепипеде стороны основания *a* и *b* образуют угол 30^0. Боковая поверхность равна *S*. Найдем его объем.

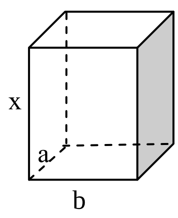


Рис. 51

Р е ш е н и е. Обозначим высоту через x (рис. 51) Тогда по формуле вычисления площади боковой поверхности параллелепипеда $S=(2a+2b)x$. Отсюда $x=\dfrac{S}{2(a+b)}$.

Площадь основания параллелепипеда равна $ab\sin 30^0=\dfrac{ab}{2}$.

Тогда $V=\dfrac{abS}{4(a+b)}$.

Объем произвольной призмы вычисляется по формуле

Объем произвольной пирамиды вычисляется по формуле

Пример. Найдите объем усеченной пирамиды с площадями оснований Q_1 и Q_2 ($Q_1 > Q_2$) и высотой h.

Р е ш е н и е. Дополним данную усеченную пирамиду до полной (рис. 52) Пусть x – ее высота. Объем усеченной пирамиды равен разности объемов двух полных пирамид: одной – с площадью основания Q_1 и высотой x, другой – с площадью основания Q_2 и высотой x – h.

Сечения пирамиды являются подобными фигурами, а площади подобных фигур относятся как квадраты линейных размеров. Тогда $\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{x}{x-h}\right)^2$. Отсюда, $x = \frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}}$.

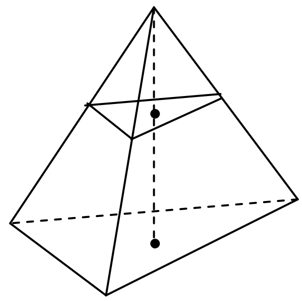


Рис. 52

Объем усеченной пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3}\left(Q_1 \frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}} - Q_2\left(\frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}} - h\right)\right) = \frac{1}{3}h(Q_1 + \sqrt{Q_1 Q_2} + Q_2 .$$

Объем цилиндра вычисляется по формуле

Объем конуса вычисляется по формуле

Задание. ***Найдите объем усеченного конуса, у которого радиусы оснований R_1 и R_2 ($R_1 > R_2$), а высота h.***

Объем шара вычисляется по формуле

Упражнения для самостоятельного решения.

№ 209. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 8 см, 12 см и 18 см. Найдите ребро куба, объем которого равен объему этого параллелепипеда.

№ 210. Кирпич имеет форму прямоугольного параллелепипеда с измерениями 25 см, 12см и 6,5 см. Плотность кирпича равна 1,8 г/см^3. Найдите его массу.

№ 211. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 18 см и составляет угол в 30^0 с плоскостью боковой грани и угол в 45^0 с боковым ребром. Найдите объем параллелепипеда.

№ 212. В прямом параллелепипеде стороны основания $2\sqrt{2}$ см и 5 см образуют угол 45^0. Меньшая диагональ параллелепипеда равна 7 см. Найдите его объем.

№ 213. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если: 1) AC_1 = 1 м, $\angle C_1AA_1 = 45^0$, $\angle C_1AB = 60^0$; 2) AC_1 = 24 см , $\angle C_1AA_1 = 45^0$, диагональ AC_1 составляет угол в 30^0 с плоскостью боковой грани.

№ 214. Основание прямого параллелепипеда – ромб, площадь которого 1 м^2. Площади диагональных сечений 3 м^2 и 6 м^2. Найдите объем параллелепипеда.

№ 215. Основание наклонного параллелепипеда – квадрат, сторона которого равна 1 м. Одно из боковых ребер равно 2 м и образует с каждой из прилежащих сторон угол 60^0. Найдите объем параллелепипеда.

№ 216. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 3,5 см, а диагональ боковой грани – 2,5 см. Найдите объем призмы.

№ 217. Сторона основания правильной треугольной призмы равна *a*, боковая поверхность равновелика сумме оснований. Найдите ее объем.

№ 218. Найдите объем прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$, если $\angle BAC = 90^0$, BC = 37 см, AB = 35 см, AA_1 = 1,1 дм.

№ 219. Найдите объем прямой призмы, если $ABCA_1B_1C_1$, если $\angle BAC = 120^0$, AB = 5 см, AC = 3 см и наибольшая из площадей боковых граней равна 35 см^2.

№ 220. Наибольшая диагональ правильной шестиугольной призмы равна 8 см и составляет с боковым ребром угол в 30^0. Найдите объем призмы.

№ 221. Основание призмы – треугольник, у которого одна сторона равна 2 см, две другие по 3 см. Боковое ребро равно 4 см и составляет с плоскостью основания угол 45^0. Найдите ребро равновеликого куба.

№ 222. При рытье колодца, основание которого имеет форму квадрата со стороной 1,8 м, было вынуто 40 т. земли. Найдите глубину колодца, если плотность вынутой земли 1,6 г/см^3.

№ 223. Бак с прямоугольным основанием 4 х 2 м вмещает 16000 л. воды. Сколько оцинкованного железа пошло на изготовление этого бака с крышкой, если отходы составляют 7%.

№ 224. Найдите объем наклонной треугольной призмы, если расстояния между ее боковыми ребрами равны 37 см, 13 см и 30 см, а площадь боковой поверхности равна 480 см^2.

№ 225. Найдите объем пирамиды с высотой h, если:

1) h = 2 м, а основанием служит квадрат со стороной 3 м;
2) h = 2, 2 м, а основанием служит треугольник ABC, в котором AB = 20 см, BC = 13,5 см, $\angle ABC = 30^0$.

№ 226. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, высота которого равна 12 см, а сторона основания равна 13 см.

№ 227. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно m и составляет с плоскостью основания угол φ. Найдите объем пирамиды.

№ 228. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник ABC, в котором AB = BC = 13 см, AC = 10 см. Каждое боковое ребро образует с ее высотой угол в 30^0. Вычислите объем пирамиды.

№ 229. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетами a и b. Каждое ее боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом φ. Найдите объем пирамиды.

№ 230. Основание четырехугольной пирамиды – прямоугольник с диагональю b и углом α между диагоналями. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом. Найдите этот угол, если объем пирамиды равен V.

№ 231. Основанием пирамиды DABC является треугольник, в котором AB = 20 см, AC = 29 см, BC = 21 см. Грани DAB и DAC перпендикулярны к плоскости основания, а грань DBC составляет с ней угол в 60^0. Найдите объем пирамиды.

№ 232. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник, катеты которого равны 24 дм и 18 дм. Каждое боковое ребро равно 25 дм. Пирамида пересечена плоскостью, параллельной плоскости основания и делящей боковое ребро пополам. Найдите объем полученной усеченной пирамиды.

№ 233. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде стороны оснований равны 6 см и 4 см, а площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани, равна 15 см^2. Найдите объем усеченной пирамиды.

№ 234. Пусть V, r и h соответственно объем, радиус и высота цилиндра. Найдите: а) V, если $r = 2\sqrt{2}$ см, h = 3 см; б) r, если V = 120 см^3, h = 3,6 см; в) h, если r = h, V = 8π см^3.

№ 235. Площадь основания цилиндра равна Q, а площадь его осевого сечения равна S. Найдите объем цилиндра.

№ 236. Высота конуса равна 5 см. На расстоянии 2 см от вершины его пересекает плоскость, параллельная основанию. Найдите объем исходного конуса, если объем меньшего конуса, отсекаемого от исходного, равен 24 см^3.

№ 237. Найдите объем конуса, если площадь его основания равна Q, а площадь боковой поверхности равна P.

№ 238. Высота конуса равна диаметру его основания. Найдите объем конуса, если его высота равна H.

№ 239. Найдите объем конуса, если его образующая равна 13 см, а площадь осевого сечения равна 60 $см^2$.

№ 240. Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 м и 6 м, а образующая равна 5 см. Найдите объем усеченного конуса.

№ 241. В усеченном конусе известны высота h, образующая l и площадь S боковой поверхности. Найдите площадь осевого сечения и объем усеченного конуса.

№ 242. Шар и цилиндр имеют равные объемы, а диаметр шара равен диаметру основания цилиндра. Выразите высоту цилиндра через радиус шара.

№ 243. Чугунный шар регулятора имеет массу 10 кг. Найдите диаметр шара (плотность чугуна 7,2 $г/см^3$)

№ 244. Внешний диаметр полого чугунного шара 70 см, внутренний – 30см. Найдите массу шара.

Приложения

I. Формулы сокращённого умножения

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

II. Разложение квадратного трёхчлена $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$,

где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2+bx+c = 0$

III. Квадратное уравнение $ax^2+bx+c = 0$

$\mathbf{X_{1,2}} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (формула корней квадратного уравнения)

IV. Площадь треугольника

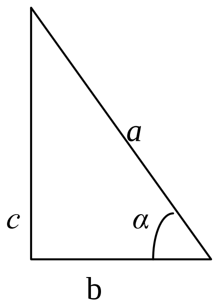
$\mathbf{S = \frac{1}{2} ah_a}$; $\mathbf{S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha}$;

$\mathbf{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$ **-** формула Герона

V. Прямоугольный треугольник

$\alpha = 90^0$, b, c – катеты, a – гипотенуза;

$a^2 = b^2 + c^2$ – теорема Пифагора



$\sin \alpha = \frac{c}{a}$; $\cos \alpha = \frac{b}{a}$; $\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{c}{b}$; $\mathrm{ctg}\ \alpha = \frac{b}{c}$;

VI. Таблица значений тригонометрических функций некоторых углов:

Функция	Аргумент α							
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
ctg α	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

VII. Основные тригонометрические тождества:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \qquad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1;$$

$$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \qquad ctg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

VIII. Логарифмы

Запись $\mathbf{\log_a b = x}$ означает, что $\boldsymbol{a^x = b}$; *a>0, a≠1 (определение логарифма).*

$\mathbf{\log_{10} b}$ (десятичный логарифм) – сокращенная запись $\mathbf{lg\, b}$

$\mathbf{\log_e b}$ (натуральный логарифм) – сокращенная запись $\mathbf{ln\, b}$

$\lg 1 = 0,\quad \lg 10 = 1,\quad \lg 100 = 2,\quad \lg 1000 = 3, \ldots,\quad \lg 10^n = n$

$\lg 0{,}1 = -1,\quad \lg 0{,}01 = -2,\quad \lg 0{,}001 = -3,\quad \ldots,\quad \lg 10^{-n} = -n$

$\ln 1 = 0,\quad \ln e = 1,\quad \ln e^2 = 2,\quad ln\ e^3 = 3, \ldots,\quad \ln e^n = n$

© Редакционно - издательский отдел СПЭК,
214018, г. Смоленск, проспект Гагарина, 56, т.: (0812) 55 – 41 – 04.
E-mail: spek@spek.keytown.com