***Определение производной***

*Производная функции* − одно из основных понятий математики, а в математическом анализе производная наряду с интегралом занимает центральное место. Процесс нахождения производной называется *дифференцированием*. Обратная операция − восстановление функции по известной производной − называется *интегрированием*.

Производная функции в некоторой точке характеризует скорость изменения функции в этой точке. Оценку скорости изменения можно получить, вычислив отношение изменения функции Δy к соответствующему изменению аргумента Δx. В определении производной такое отношение рассматривается в пределе при условии Δx→0. Перейдем к более строгой формулировке:

***Определение производной***

Рассмотрим функцию f(x), область определения которой содержит некоторый открытый интервал вокруг точки x0. Тогда функция f(x) является *дифференцируемой*  в точке x0, и ее *производная* определяется формулой

$$f^{'}\left(x\_{0}\right)=\lim\_{∆x\to 0}\frac{∆y}{∆x}=\lim\_{∆x\to 0}\frac{f\left(x\_{0}-∆x\right)-f(x\_{0})}{∆x}$$

Производная функции f в точке х обозначается (читается «эф штрих от х»).

 Опираясь на определение, вычисление производной функции y = f(x) производится в соответствии со следующим **алгоритмом**:

1. Даем не нулевое приращение аргументу;
2. Находим приращение функции $∆f$ (можно использовать обозначение $∆у$);
3. Находим отношение $\frac{∆f}{∆x}$. Упростить это выражение и сократить его на $∆х$
4. Вычисляем полученное выражение при $∆х\rightarrow 0$.

**Пример.** Найдем производную постоянной функции f(x) = c.

Р е ш е н и е.

1. х, Δх ≠ 0, х + Δх.
2. Δf = f (х + Δх) - f(x) = с – с = 0.
3. .
4. Получили, что  при любом Δх , и, значит,  при .

Следовательно, .

**Пример.** Найдем производную функции f(x) = x2.

Р е ш е н и е.

1. х, Δх ≠ 0, х + Δх.
2. Δf = f (х + Δх) - f(x) = (х + Δх)2 – х2 = 2хΔх + (Δх)2.
3. .
4. Заметим, что слагаемое 2х постоянно, а при  очевидно, второе слагаемое стремится к нулю. Получаем:  при .

Следовательно, .

Понятно, что использовать постоянно определение для вычисления производной крайне тяжело. Тут нам приходит на помощь таблица производных элементарных функций, а так же правила дифференцирования.

**Таблица производных элементарных функций**

|  |  |
| --- | --- |
| 1. , $n\in R$
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
 | 1. , где $a\in R$
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
 |
| **Основные правила дифференцирования:**1.

(Словесная формулировка: производная суммы равна сумме производных)1.

(Словесная формулировка: производная разности равна разности производных)1.
2.
3. , где $с\in R$

(Словесная формулировка: постоянный множитель выносится за знак производной) |

**Пример.** Найдем , если а) ; б) ; в) ;

г) ; д) .

Р е ш е н и е.

*а)* . (используем 1 правило дифференцирования)

*б)* . (используем 2 правило дифференцирования)

*в)* . (используем 3 правило дифференцирования)

Вычислим  и :

;

.

Следовательно, .

(используем правило 4)

*д)* . (используем 5 правило дифференцирования)

***Задание 1. Пользуясь таблицей производных и основными правилами дифференцирования вычислите:***

а) ; б) ;в) ; г) .

д) ****; е)  ; ж) ; з) ; и) ;

к) ; л) ; м) ; **о**) ; п) ; р) ; с) .

***Задание 2. Выясните, при каких значениях х значение производной функции f(x) равно 0:***

а) ; б) ; в) ; г) .

***Задание 3. Найдите , если:***

а) ; б) ; в) ; г) .

***Задание 4. Найдите*** $f'(\frac{π}{2})$***, если:***

а) ; б) ; в) ; г) .

***Определение***: производная -го порядка от функции  есть производная от ее производной.

Например: 

***Задание 5. Вычислите*** $f^{''}\left(x\right) и f'''(x)$***:***

а) ; б) ; в) ; г) .

**Производная сложной функции.**

***Определение сложной функции***

Пусть функция$ u=g(x)$   определена на множестве X и U - множество значений этой функции. Пусть, множество U (или его подмножество) является областью определения функции $y=f(u)$. Поставим  в соответствие каждому x из X число $f(g(x))$. Тем самым на множестве X будет задана функция $y=f(g(x))$. Ее называют композицией функций или сложной функцией.

В этом определении, если пользоваться нашей терминологией, $y=f(u)$  - внешняя функция, $u=g(x)$  - промежуточный аргумент.

**Производная сложной функции находится по такому правилу:**

$$\left(f\left(g\left(x\right)\right)\right)^{'}=f'(g(x))∙g'(x)$$

**Алгоритм нахождения производной сложной функции**

1. Определить, какая функция является внешней и найти по таблице производных соответствующую производную.

2. Определить промежуточный аргумент.

В этой процедуре наибольшие затруднения вызывает нахождение внешней функции. Для этого используется простой алгоритм:

а. Запишите уравнение функции.

б. Представьте, что вам нужно вычислить значение функции при каком-то значении х. Для этого вы подставляете это значение х в уравнение функции и производите арифметические действия. То действие, которое вы делаете последним и есть внешняя функция.

**Пример.** Найдем производную функции .

Решение. Функцию у можно представить в виде сложной функции y = f(g(x)), где u=g(x)=2x+3, у=f(u)=u100.

Так как  и , имеем .

**Пример.** Найдем производную функции .

Решение. Функцию у можно представить в виде сложной функции y = f(g(x)), где u=g(x)=3х2+1, у=f(u)=. Так как  и , имеем.

***Задание 6. Найдите производную функции:***

а) ; б) ; в) ; г) ; д) ;

 е) ; ж) ; з) .

 ***Задание 7. Найдите значение производной функции f(x) в точке х0 .***

а) ; б) ;

в) ; г) .

***Задание 8. Выясните, при каких значениях х значение производной функции f(x) равно 0:***

а) $f\left(x\right)=(2x+1)^{5}$; б) ; в) $f\left(x\right)=cos⁡(3x-4)$;

г) .

***Задание 9. Выясните, при каких значениях х значение производной f(x) положительно:***

а) $f\left(x\right)=(6x^{2}+1)^{3}$; б)$ f\left(x\right)=\sqrt{-7х+1}$; г) $f\left(x\right)=е^{\frac{1}{2}х}$; д) $f\left(t\right)=(t-10)^{3}$.

***Задание 10. Вычислите:***

 ***, если .***