***Определение производной***

*Производная функции* − одно из основных понятий математики, а в математическом анализе производная наряду с интегралом занимает центральное место. Процесс нахождения производной называется *дифференцированием*. Обратная операция − восстановление функции по известной производной − называется *интегрированием*.

Производная функции в некоторой точке характеризует скорость изменения функции в этой точке. Оценку скорости изменения можно получить, вычислив отношение изменения функции Δy к соответствующему изменению аргумента Δx. В определении производной такое отношение рассматривается в пределе при условии Δx→0. Перейдем к более строгой формулировке:

***Определение производной***

Рассмотрим функцию f(x), область определения которой содержит некоторый открытый интервал вокруг точки x0. Тогда функция f(x) является *дифференцируемой*  в точке x0, и ее *производная* определяется формулой

Производная функции f в точке х обозначается (читается «эф штрих от х»).

Опираясь на определение, вычисление производной функции y = f(x) производится в соответствии со следующим **алгоритмом**:

1. Даем не нулевое приращение аргументу;
2. Находим приращение функции (можно использовать обозначение );
3. Находим отношение . Упростить это выражение и сократить его на
4. Вычисляем полученное выражение при .

**Пример.** Найдем производную постоянной функции f(x) = c.

Р е ш е н и е.

1. х, Δх ≠ 0, х + Δх.
2. Δf = f (х + Δх) - f(x) = с – с = 0.
3. .
4. Получили, что  при любом Δх , и, значит,  при .

Следовательно, .

**Пример.** Найдем производную функции f(x) = x2.

Р е ш е н и е.

1. х, Δх ≠ 0, х + Δх.
2. Δf = f (х + Δх) - f(x) = (х + Δх)2 – х2 = 2хΔх + (Δх)2.
3. .
4. Заметим, что слагаемое 2х постоянно, а при  очевидно, второе слагаемое стремится к нулю. Получаем:  при .

Следовательно, .

Понятно, что использовать постоянно определение для вычисления производной крайне тяжело. Тут нам приходит на помощь таблица производных элементарных функций, а так же правила дифференцирования.

**Таблица производных элементарных функций**

|  |  |
| --- | --- |
| 1. , | 1. , где |
| **Основные правила дифференцирования:**      (Словесная формулировка: производная суммы равна сумме производных)      (Словесная формулировка: производная разности равна разности производных)     3. , где   (Словесная формулировка: постоянный множитель выносится за знак производной) |

**Пример.** Найдем , если а) ; б) ; в) ;

г) ; д) .

Р е ш е н и е.

*а)* . (используем 1 правило дифференцирования)

*б)* . (используем 2 правило дифференцирования)

*в)* . (используем 3 правило дифференцирования)

Вычислим  и :

;

.

Следовательно, .

(используем правило 4)

*д)* . (используем 5 правило дифференцирования)

***Задание 1. Пользуясь таблицей производных и основными правилами дифференцирования вычислите:***

а) ; б) ;в) ; г) .

д) ****; е)  ; ж) ; з) ; и) ;

к) ; л) ; м) ; **о**) ; п) ; р) ; с) .

***Задание 2. Выясните, при каких значениях х значение производной функции f(x) равно 0:***

а) ; б) ; в) ; г) .

***Задание 3. Найдите , если:***

а) ; б) ; в) ; г) .

***Задание 4. Найдите , если:***

а) ; б) ; в) ; г) .

***Определение***: производная -го порядка от функции  есть производная от ее производной.

Например: 

***Задание 5. Вычислите :***

а) ; б) ; в) ; г) .

**Производная сложной функции.**

***Определение сложной функции***

Пусть функция   определена на множестве X и U - множество значений этой функции. Пусть, множество U (или его подмножество) является областью определения функции . Поставим  в соответствие каждому x из X число . Тем самым на множестве X будет задана функция . Ее называют композицией функций или сложной функцией.

В этом определении, если пользоваться нашей терминологией,   - внешняя функция,   - промежуточный аргумент.

**Производная сложной функции находится по такому правилу:**

**Алгоритм нахождения производной сложной функции**

1. Определить, какая функция является внешней и найти по таблице производных соответствующую производную.

2. Определить промежуточный аргумент.

В этой процедуре наибольшие затруднения вызывает нахождение внешней функции. Для этого используется простой алгоритм:

а. Запишите уравнение функции.

б. Представьте, что вам нужно вычислить значение функции при каком-то значении х. Для этого вы подставляете это значение х в уравнение функции и производите арифметические действия. То действие, которое вы делаете последним и есть внешняя функция.

**Пример.** Найдем производную функции .

Решение. Функцию у можно представить в виде сложной функции y = f(g(x)), где u=g(x)=2x+3, у=f(u)=u100.

Так как  и , имеем .

**Пример.** Найдем производную функции .

Решение. Функцию у можно представить в виде сложной функции y = f(g(x)), где u=g(x)=3х2+1, у=f(u)=. Так как  и , имеем.

***Задание 6. Найдите производную функции:***

а) ; б) ; в) ; г) ; д) ;

е) ; ж) ; з) .

***Задание 7. Найдите значение производной функции f(x) в точке х0 .***

а) ; б) ;

в) ; г) .

***Задание 8. Выясните, при каких значениях х значение производной функции f(x) равно 0:***

а) ; б) ; в) ;

г) .

***Задание 9. Выясните, при каких значениях х значение производной f(x) положительно:***

а) ; б); г) ; д) .

***Задание 10. Вычислите:***

***, если .***