I Разделение переменных

А.$\frac{dy}{dx} = f(x);\quad dy = f(x)dx;\quad \int dy = \int f(x)dx.$

Пример 1. Найти частное решение дифференциального уравнения

$5*\frac{dy}{dx} + 2x = 3$, *если заданы граничные условия* $y = 1\frac{2}{5}$ при $x = 2.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3-2x}{5} = \frac{3}{5} - \frac{2x}{5};\quad dy = \left(\frac{3}{5} - \frac{2x}{5}\right)dx;$$

$$y = \int (\frac{3}{5} - \frac{2x}{5})dx = \frac{3x}{5} - \frac{x^2}{5} + C - \text{общее решение.}$$

По условию $y = 1\frac{2}{5}$ при $x = 2$, *значит,* $1\frac{2}{5} = \frac{6}{5} - \frac{4}{5} + C;$

$1\frac{2}{5} = \frac{2}{5} + C$ *или* $\text{С} = 1.$

$$y = \frac{3x}{5} - \frac{x^2}{5} + 1 - \text{частное решение.}$$

Б. $\frac{dy}{dx} = f(y);\quad \frac{dy}{f(y)} = dx;\quad \int \frac{dy}{f(y)} = \int dx.$

Пример 2. Найти частное решение дифференциального уравнения

$(y^2 - 1)\frac{dy}{dx} = 3y$, *при условии, что* $y = 1$ при $x = 2\frac{1}{6}.$

$dx = \frac{y^2-1}{3y}dy = \left(\frac{y}{3} - \frac{1}{3y}\right)dy;\quad \int dx = \int \left(\frac{y}{3} - \frac{1}{3y}\right)dy;$

$$x = \frac{y^2}{6} - \frac{1}{3}ln|y| + C - \text{общее решение.}$$

По условию, $x = 2\frac{1}{6}$ при $y = 1$, *значит,* $2\frac{1}{6} = \frac{1}{6} - \frac{1}{3}ln1 + C$, *C=2.*

$$x = \frac{y^2}{6} - \frac{1}{3}ln|y| + 2 - \text{частное решение.}$$

$B.\frac{dy}{dx} = f(x) * f(y)$, $\frac{dy}{f(y)} = f(x)dx$, $\int \frac{dy}{f(y)} = \int f(x)dx$.

Пример 3. Решите уравнение: $4xy\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$.

$\frac{4y}{y^2-1}dy = \frac{1}{x}dx$, $\int \frac{4y}{y^2-1}dy = \int \frac{1}{x}dx$, $\begin{bmatrix} u = y^2 - 1; \\ du = 2ydy; \\ dy = \frac{du}{2y} \end{bmatrix}$

$\int \frac{4y*dy}{u*2y} = \int \frac{1}{x}dx$, $2ln|y^2 - 1| = lnx + C$.

II *Однородные дифференциальные уравнения I порядка*

Уравнение вида P $* \frac{dy}{dx} = Q$, *где P, Q – алгебраические функции с одной степенью переменных x, y.*

1.*Преоразуем уравнение к виду* $\frac{dy}{dx} = \frac{P}{Q}$

2.*Произведем подстановку* $y = u * x$, *где* u *- функция от x*

По правилу дифференцирования произведения имеем:

$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} * x + u * 1$.

3.Подставляем y и $\frac{dy}{dx}$ *в уравнение* $\frac{dy}{dx} = \frac{P}{Q}$ *, в котором разделим переменные.*

4. Решим уравнение интегрированием.

5.Подставим $u = \frac{y}{x}$ *для выражения решения уравнения в исходных переменных.*

Пример 4. Найти частное решение дифференциального уравнения $x\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{y}$*, при условии, что* $y = 4$ при $x = 1$.

1.Преобразуем уравнение к виду: $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{xy}$,

2.*Произведем подстановку* $y = u * x$, *где* u *- функция от x*

По правилу дифференцирования произведения имеем:

$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} * x + u * 1.$

3.Подставляем y и $\frac{dy}{dx}$ *в уравнение* $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{xy}$ *, в котором разделим переменные:*

$$\frac{du}{dx} * x + u * 1 = \frac{x^2 + (ux)^2}{x * (ux)} = \frac{x^2 + u^2 * x^2}{u * x^2} =$$

$= \frac{x^2*(1+u^2)}{u*x^2} = \frac{1+u^2}{u}$ *или* $\frac{du}{dx} * x + u * 1 = \frac{1+u^2}{u}$

$\frac{du}{dx} * x = \frac{1+u^2}{u} - u = \frac{1+u^2-u^2}{u} = \frac{1}{u}$ *или* $\frac{du}{dx} * x = \frac{1}{u}$

4.Разделяем переменные: $u * du = \frac{dx}{x}$ *или* $\int u * du = \int \frac{dx}{x}$

Находим общее решение: $\frac{u^2}{2} = ln|x| + C$*, если x=1, y=4, то*

$\frac{4^2}{2} = ln1 + C$, $\frac{16}{2} = 0 + C$, *C =8*

5. Подставим вместо $u = \frac{y}{x}$*, получим*

$\frac{y^2}{2x^2} = ln|x| + C$*- общее решение, а частное решение*

$\frac{y^2}{2x^2} = ln|x| + 8$ *или* $y^2 = 2x^2 * (ln|x| + 8)$

III Линейные *дифференциальные уравнения I порядка*

Уравнение вида $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, *где P и Q –функции, зависящие только от x, называется линейным дифференциальным уравнением, поскольку y и его производные имеют 1 степень.*

Решают данное уравнение умножением на интегрирующий множитель функцию R, зависящую только от x, получим:

$R * \frac{dy}{dx} + R * Py = R * Q$ *(1). Производную произведения находим по правилу дифференцирования произведения двух функций:*

$$\frac{d(Ry)}{dx} = R\frac{dy}{dx} + y\frac{dR}{dx},$$ *что совпадает с левой частью*

уравнения (1), если R выбрать так, чтобы $R * P = \frac{dR}{dx}$.

Если $\frac{dR}{dx} = R * P$, *то разделение переменных дает* $\frac{dR}{R} = Pdx$.

Интегрируя обе части: $\int \frac{dR}{R} = \int Pdx$ *или* $lnR = \int Pdx + C$,

$R = e^{\int Pdx+C} = e^{\int Pdx} * e^C$, $R = A * e^{\int Pdx}$, *где* $A = e^C = const.$

Подставляем $R = A * e^{\int Pdx}$ *в уравнение (1), получим:*

$A * e^{\int Pdx} * \frac{dy}{dx} + A * e^{\int Pdx} * Py = A * e^{\int Pdx} * Q$,

$e^{\int Pdx} * \frac{dy}{dx} + e^{\int Pdx} * Py = e^{\int Pdx} * Q$ *(2).*

Левая часть уравнения (2) – это $\frac{d(y * e^{\int Pdx})}{dx}$, *что можно проверить дифференцированием* $y * e^{\int Pdx}$ *по x согласно правилу дифференцирования произведения двух функций.*

Из уравнения (2) $\frac{d(y*e^{\int Pdx})}{dx} = e^{\int Pdx} * Q$ *. Интегрируем обе части:*

$y * e^{\int Pdx} = e^{\int Pdx} * Q$ *(3), где* $e^{\int Pdx}$ *- интегрирующий множитель.*

Пример 5. Найти частное решение дифференциального уравнения

$\frac{1}{x} * \frac{dy}{dx} + 4y = 2,$ *при условии, что* $y = 4$ при $x = 0.$

1). Умножим обе части уравнения на x: $\frac{dy}{dx} + 4xy = 2x$ *и с учетом*

$\frac{dy}{dx} + Py = Q$ *, получим: P=4x, Q=2x.*

2). $\int Pdx = \int 4xdx = 2x^2$

3). Интегрирующий множитель: $e^{\int Pdx} = e^{2x^2}$

4).Произведем подстановку в уравнение (3) $y * e^{2x^2} = \int e^{2x^2}(2x)\,dx$

5). $y * e^{2x^2} = \frac{1}{2} * e^{2x^2} + C$ *- общее решение*

Используем подстановку $u = 2x^2$*. По граничным условиям*

$y = 4$ при $x = 0$ *имеем:* $4e^0 = \frac{1}{2} * e^0 + C$ *или C=*$\frac{7}{2}$

$y * e^{2x^2} = \frac{1}{2} * e^{2x^2} + \frac{7}{2}$ *- частное решение или* $y = \frac{1}{2} + \frac{7}{2} * e^{-2x^2}$

$$y = \frac{1}{2} * (1 + 7 * e^{-2x^2})$$