ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 15

Выполните деление с остатком многочлена
$f(x) = 3x^4 + 5x^3 - x^2 + 2$ на $g(x) = 2x^2 + 3x + 1$ двумя способами:

А) «уголком»;

Б) с помощью метода неопределенных коэффициентов.

Решение.

А) Разделим «уголком» многочлен f(x) большей степени на многочлен q(x) меньшей степени:

$$\begin{array}{l|l} f(x) = 3x^4 + 5x^3 - x^2 + 2 & \underline{x^2 + 3x + 1 = g(x)} \end{array}$$

1. Уравниваем старшие коэффициенты многочленов, длячего многочлен g(x) умножим на $3x^2$, а затем находим разность $f_1(x) = f(x) - g(x) \times 3x^2$:

$$\begin{array}{l|l} f(x) = 3x^4 + 5x^3 - x^2 + 2 & \underline{x^2 + 3x + 1 = g(x)} \\ \underline{\quad 3x^4 + 9x^3 + 3x^2} & 3x^2 \\ f_1(x) = -4x^3 - 4x^2 + 2 & \end{array}$$

Таким образом, степень многочлена $f_1(x)$ больше степени делителя g(x), Поэтому повторяем шаг деления «уголком».

2. Уравниваем старшие члены многочленов $f_1(x)$ и g(x), для чего многочлен h(x) умножим на (–4x), а затем найдем разность

$f_2(x) = f_1(x) - h(x) \times (-4x)$.

$$\begin{array}{l|l} f(x) = 3x^4 + 5x^3 - x^2 + 2 & \underline{x^2 + 3x + 1 = g(x)} \\ \underline{\quad 3x^4 + 9x^3 + 3x^2} & 3x^2 - 4x \\ f_1(x) = -4x^3 - 4x^2 + 2 & \\ \quad \underline{-4x^3 - 12x^2 - 4x} & \\ \quad f_2(x) = 8x^2 + 4x + 2 & \end{array}$$

Таким образом, получаем
$f_1(x) = g(x) \times (-4)x + f_2(x)$, откуда,
$f(x) = g(x) \times 3x^2 + g(x) \times (-4x) + f_2(x) = g(x) \times (3x^2 - 4x) + f_2(x)$.
Степень многочлена $f_2(x)$ равна степени делителя g(x), поэтому повторяем еще раз шаг деление «уголком».

3. Уравниваем теперь старшие члены многочленов $f_2(x)$ и g(x), для чего g(x) умножаем на 8 и находим разность $f_2(x) - g(x) \times 8$:

$$
\begin{array}{l|l}
f(x) = 3x^4 + 5x^3 - x^2 + 2 & x^2 + 3x + 1 = g(x) \\
\underline{\quad 3x^4 + 9x^3 + 3x^2} & 3x^2 - 4x + 8 = g(x) \\
f_1(x) = -4x^3 - 4x^2 + 2 & \\
\quad -4x^3 - 12x^2 - 4x & \\
\quad f_2(x) = 8x^2 + 4x + 2 & \\
\quad \underline{\quad 8x^2 + 24x + 8} & \\
\quad r(x) = -20x - 6 &
\end{array}
$$

Степень разности r(x) = f_2(x) – g(x) × 8 = –20x – 6 меньше степени делителя g(x), поэтому деление «уголком» закончено. Таким образом,
f(x) = g(x) × $3x^2$ + g(x) × (–4x) + f_2(x) = g(x) × $3x^2$ + g(x) × (–4x) + g(x) × 8 + r(x)= g(x) × ($3x^2$ – 4x + 8) + r(x).

В итоге получаем неполное частное g(x) = $3x^2$ – 4x + 8 и остаток r(x) = –20x – 6.

В «свернутом» виде алгоритм деления «уголком» в нашем случае выглядит так:

$$
\begin{array}{l|l}
-\,3x^4 + 5x^3 - x^2 + 2 & x^2 + 3x + 1 \\
\underline{\quad 3x^4 + 9x^3 + 3x^2} & 3x^2 - 4x + 8 = g(x) \\
\quad -\,-4x^3 - 4x^2 + 2 & \\
\quad -4x^3 - 12x^2 - 4x & \\
\qquad -\,8x^2 - 4x + 2 & \\
\quad \underline{\qquad 8x^2 + 24x + 8} & \\
\qquad -20x - 6 = r(x) &
\end{array}
$$

Ответ:g(x) = $3x^2$ – 4x + 8, r(x) = –20x – 6.

Б) При выполнении деления с помощью метода неопределенных коэффициентов используется теорема о делении с остатком f(x) = g(x) × q(x) + r(x), где r(x) – либо нулевой многочлен, либо его степень меньше степени делителя g(x).

В нашем случае делимое f(x) имеет четвертую степень, делитель g(x) имеет вторую степень, откуда заключаем, что неполное частное q(x) должно иметь вторую степень, а остаток r(x) - первую степень. Тогда

$$3x^4 + 5x^3 - x^2 + 2 = (x^2 + 3x + 1) \times (Ax^2 + Bx + C) + (Dx + E),$$

где A, B, C, D, E – неопределенные коэффициенты.

Чтобы их найти раскроем скобки в правой части равенства, получим:

$3x^4 + 5x^3 - x^2 + 2 = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + 3Ax^3 + 3Bx^2 + 3Cx + Ax^2 + Bx + C + Dx + E$.

Приравняем теперь на основании определения равенства многочленов коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получим систему линейных уравнений, которую решаем любым удобным способом:

$$\begin{cases} A = 3, \\ B + 3A = 5, \\ C + 3B + A = -1, \\ 3C + B + D = 0, \\ C + E = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3, \\ B = -4, \\ C + 3\cdot(-4) + 3 = -1, \\ 3C - 4 + D = 0, \\ C + E = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3, \\ B = 4, \\ C = 8, \\ D = -20, \\ E = 6. \end{cases}$$

Отсюда заключаем:

$$3x^4 + 5x^3 - x^2 + 2 = (x^2 + 3x + 1)\cdot\underbrace{(3x^2 - 4x + 8)}_{q(x)} + \underbrace{(-20x - 6)}_{r(x)}.$$

Значит, $q(x) = 3x^2 - 4x + 8$, $r(x) = -20x - 6$.

Ответ: $q(x) = 3x^2 - 4x + 8$, $r(x) = -20x - 6$.