ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 18

При помощи метода неопределенных коэффициентов найдите многочлены $U(x)$ и $V(x)$ такие, что $f(x) \times U(x) + g(x) \times V(x) = 1$, если

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 9,$$
$$g(x) = 3x^2 + x + 7.$$

Решение.

Искомые многочлены U(x) и V(x) обладают тем свойством, что степень многочлена U(x) меньше степени многочлена g(x), а степень многочлена V(x) меньше степени многочлена f(x). Многочлены f(x) и g(x) оба имеют вторую степень, и значит, многочлены U(x) и V(x) имеют вид:

$$U(x) = Ax + B, V(x) = Cx + D.$$

Тогда получаем:

$$(2x^2 - 4x + 9) \times (Ax + B) + (3x^2 + x + 7) \times (Cx + D) = 1.$$

Раскрываем скобки в левой части равенства:

$$2Ax^4 + 2Bx^2 - 4Ax^2 - 4Bx + 9Ax + 9B + 3Cx^3 + 3Dx^2 + Cx^2 + Dx + 7Cx + 7D = 1.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в левой и правой частях равенства получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2A + 3C = 0, \\ -4A + 2B + C + 3D = 0, \\ 9A - 4B + 7C + D = 0, \\ \quad 9B + 7D = 1. \end{cases}$$

Решим ее, например, методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 9 & -4 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 7 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -\frac{13}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 7 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{15}{2} & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{63}{2} & -\frac{13}{2} & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{14}{15} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{63} & -\frac{2}{63} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{14}{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{229}{315} & -\frac{2}{63} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{14}{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{10}{229} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & 0 & -\frac{15}{229} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{28}{687} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{10}{229} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{42}{687} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{98}{687} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{28}{687} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{10}{229} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{42}{687}, \\ B = \frac{98}{687}, \\ C = -\frac{28}{687}, \\ D = \frac{10}{229}. \end{cases}$$

$$U(x) = \frac{42}{687}x + \frac{98}{687}, \; V(x) = -\frac{28}{687}x + \frac{10}{229}.$$

Значит,

$$U(x) = \frac{42}{687}x + \frac{98}{687}, \; V(x) = -\frac{28}{687}x + \frac{10}{229}.$$

Ответ: