ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ №5.

Групповой код Хемминга

Наиболее распространенным является алфавит, состоящий из двух символов {0,1}. Сообщение кодируется по заданной схеме более длинной последовательностью, чтобы при приеме можно было распознать и исправить ошибки, проанализировав информацию, содержащуюся в дополнительных символах.

Построение конкретного корректирующего кода производится исходя из требуемого объёма кода N, т.е. необходимого числа передаваемых команд или дискретных значений измеряемой величины и статистических данных о наиболее вероятных векторах ошибок в используемом канале связи. Вектором ошибки будем называть кодовую комбинацию, имеющую единицы в разрядах, подвергающихся искажению, и нули во всех остальных разрядах. Любую искаженную кодовую комбинацию можно рассматривать теперь как сумму (равно как и разность) по модулю два разрешенной кодовой комбинации и вектора ошибки.

Исходя из равенства

$$2k - 1 > N$$

определяем число информационных разрядов, необходимое для передачи заданного числа команд обычным двоичным кодом.

Чтобы иметь возможность получить информацию о векторе ошибки, воздействию которого подверглась полученная кодовая комбинация, каждому вектору ошибки, подлежащей устранению, должна быть сопоставлена некоторая контрольная последовательность символов, называемая опознавателем.

Каждый символ на приемной стороне будет определяться в результате проверки справедливости одного из равенств, которые мы составим для определения значений проверочных символов при кодировании.

В групповом коде значения проверочных символов подбираются так, чтобы сумма по модулю для всех символов (включая проверочный), входящих в каждое из равенств, равнялась нулю. В таком случае число единиц среди этих символов четное. Поэтому операции определения этих символов опознавателя называют проверками на четность. При отсутствии ошибок в результате всех проверок на четность образуется опознаватель, состоящий из одних нулей. Если проверочное равенство не удовлетворяется, то в соответствующем разряде опознавателя появляется единица. Исправление ошибок возможно лишь при наличии взаимно однозначного соответствия между множеством опознавателей и множеством подлежащих исправлению разновидностей ошибок.

Таким образом, количество подлежащих исправлению ошибок является определяющим для выбора числа избыточных символов n-k. Последних должно быть достаточно для того, чтобы обеспечить необходимое число опознавателей.

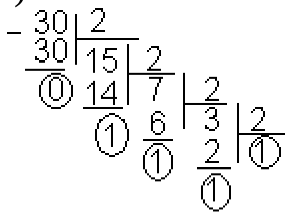
Примеры решения задач

110) Закодировать число 30 групповым кодом Хэмминга, исправляющим одиночную ошибку. Внести с полученную кодовую комбинацию одиночную ошибку и определить какой именно символ сообщения был искажен.

Решение.

1). А=30.

2). Запишем это число в двоичной системе счисления.



$A=30_{10}=11110_2$.

3). Найдем разрядность избыточной комбинации по известной разрядности двоичного кода по формуле: $2^{n-k}-1 \geq n$, где k=5 (т.к. в двоичном числе А 5 разрядов). Минимальное n, которое удовлетворяет этому неравенству, равно 9.

4). Изобразим структуру избыточной кодовой комбинации и укажем места проверочных, избыточных символов. В коде Хэмминга они занимают фиксированные места с номером 2^i, т.е. 1,2,4,8,…

a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9

a_1, a_2, a_4, a_8 – избыточные разряды

a_3, a_5, a_6, a_7, a_9 – информационная часть, это сообщение А, т.е.

$a_3=1$, $a_5=1$, $a_6=1$, $a_7=1$, $a_9=0$.

5). Найдем значения проверочных символов (обратите внимание как подчеркнуты единицы в каждом столбце).

1	001	$a_1= a_3+a_5+ a_7+a_9=1+1+1+0=1$
2	010	
3	011	$a_2= a_3+a_6+a_7=1+1+1=1$
4	100	
5	101	$a_4= a_5+a_6+a_7=1+1+1=1$
6	110	
7	111	$a_8= a_9=0$
8	1000	
9	1001	

Получаем сообщение, которое было передано: 1 1 1 1 1 1 1 0 0.

6). Внесем в эту кодовую комбинацию одиночную ошибку, например, в четвертом разряде: 1 1 1 0 1 1 1 0 0.

Так как неизвестно в каком именно разряде ошибка, введем новые обозначения. А именно обозначим принятые символы $a_1^/, a_2^/, ..., a_9^/$.

Составим проверочные уравнения:

$$P_1 = a_1' + a_3' + a_5' + a_7' + a_9'$$
$$P_2 = a_2' + a_3' + a_6' + a_7'$$
$$P_3 = a_4' + a_5' + a_6' + a_7'$$
$$P_4 = a_8' + a_9'$$

Совокупность этих проверок, если её читать как двоичное число укажет нам номер искаженного сигнала.

$$P_1 = 1 + 1 = 0$$
$$P_2 = 1 + 1 = 0$$
$$P_3 = 0 + 1 = 1$$
$$P_4 = 0 + 0 = 0$$

$P_4P_3P_2P_1 = 0100_2 = 4_{10}$, т.е. искажен 4-ый символ.