

1 Булев куб. Расстояние Хэмминга

- Векторное пространство на множестве всех двоичных векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$ длины n называется n -мерным булевым кубом и обозначается E^n .
 - Расстояние Хэмминга $d(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \oplus y_i$, для любых $x, y \in E^n$.
 - Вес Хэмминга $w(x) = \sum_{i=1}^n x_i$, для любого $x \in E^n$.
-

1.1 Доказать, что

- а) $x + E^n = E^n, \forall x \in E^n$;
- б) $\pi(E^n) = E^n, \forall \pi \in S_n$.

1.2 Доказать, что

- а) $d(x, y) = w(x + y)$;
- б) $w(x + y) = w(x) + w(y) - 2w(x * y)$;
- в) $w(x + y) \geq w(x) - w(y)$, причем равенство достигается $\Leftrightarrow y \preceq x$ (вектор y предшествует x).

1.3 Доказать, что расстояние Хэмминга является метрикой, а E^n — метрическим пространством:

- а) $d(x, y) \geq 0$, причем $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксиома тождества);
- б) $d(x, y) = d(y, x)$ (аксиома симметрии);
- в) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ (аксиома треугольника) для $\forall x, y, z \in E^n$.

1.4 Доказать, что $d(x, z) = d(x + y, z + y), \forall x, y, z \in E^n$.

1.5 Найти число ребер в E^n .

1.6 Найти число неупорядоченных пар векторов $x, y \in E^n$ таких, что $d(x, y) = k$.

1.7 Найти число вершин и ребер в E_q^n .

1.8 Найти число вершин

- а) в сфере радиуса r в E^n, E_q^n ;
- б) в шаре радиуса r в E^n, E_q^n .

1.9 Пусть $x, y \in E^n, d(x, y) = m$. Найти число вершин z , удовлетворяющих условию:

- а) $d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)$;
- б) $d(x, z) = k, d(y, z) = r$;
- в) $d(x, z) \leq k, d(y, z) = r$;
- г) $d(x, z) \leq k, d(y, z) \geq r$.

1.10 Показать, что всякое подмножество E^n , содержащее не менее $n + 2$ наборов, содержит пару несравнимых элементов ($n \geq 2$).

1.11 Найти число баз в E^n .

Теория к Семинару 2 "Линейные коды".

Линейный код. Теорема о связи порождающей и проверочной матриц линейного кода. Параметры кода: длина, мощность, кодовое расстояние. Связь кодового расстояния с исправлением ошибок.