

ЗАДАЧИ для самостоятельного решения

Теория пределов.

I. Найти пределы функций:

$$1. \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^4 + x^2 + 1}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x} - 1}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{2-\sqrt{x}-1}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 6}{3x^3 + x^2 - 26}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 5x - 1}{2x^2 - x - 1}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{4 - \sqrt{2x} - 2}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - 3}{x^2 - 49}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 5}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{4x^2 - 9}{2x + 3}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 + x}{x}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} \frac{x^4 - 25}{x^2 - 5}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 5}{x^3 + 3x + 7}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 9x + 20}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{3x^2 + 5x + 2}{3x^2 + 8x + 4}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 25}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^4 - 8x^2 + 3}{5x^3 + 3x^3 + 5}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 4x^2 - 1}{8x^4 - 6x^3 + 3}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{x}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}$$

$$27. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$$

$$29. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{3x}\right)^{2x}$$

$$31. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{5}{x}}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^x$$

$$30. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3x}\right)^x$$

$$32. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{5x}$$

$$33. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$$

II. Исследуйте функцию на непрерывность в точке x_0 и установите характер точек разрыва.

$$1. y = \frac{1}{x-5} \quad x_0 = 5$$

$$4. y = \frac{x^2 - 36}{x-6} \quad x_0 = 6$$

$$7. y = \frac{x^3 - 1}{x-1} \quad x_0 = 1$$

$$2. y = \frac{1}{x+5} \quad x_0 = -5$$

$$5. y = \frac{x^2 - 36}{x-6} \quad x_0 = -6$$

$$8. y = \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x^2 - 9} \quad x_0 = 3$$

$$3. y = \frac{x}{x-4} \quad x_0 = 4$$

$$6. y = \frac{x^2}{x-3} \quad x_0 = 3$$

$$9. y = \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x^2 - 9} \quad x_0 = -3$$

$$10. \frac{x-7}{x^2-49} \quad x_0 = 7$$

$$11. \frac{x-7}{x^2-49} \quad x_0 = -7$$

$$12. \text{Дана функция: } \begin{cases} x^2 + 2, & -\infty \leq x \leq 2 \\ 6 & 2 < x \leq +\infty \end{cases}$$

а) Исследуйте функцию на непрерывность.

б) Постройте график.

в) В точке разрыва определите функцию таким образом, чтобы она стала непрерывной на всей области определения.

Дифференциальное исчисление

1. Определить скорость движения точки в конце третьей секунды, если путь в s метров, пройденный точкой за t секунд выражается так: $s = 2t^3 - 3$
2. Когда скорость точки, движущейся по закону $s = t^2 - 4t + 5$ станет равна нулю?
3. Определить скорость изменения функции $y = 3x^2 - 4x + 2$ при $x = \frac{2}{3}$
4. $f(x) = 3x^2$ Найти $f'(2)$, $f'(-1)$, $f'(-3)$
5. Найти производную функции:
 - 1) $2x^2 - 4x + 2$
 - 2) $-x^3 + 9x^2 + x - 1$
 - 3) $(2x + 1)(x^2 + 3x - 1)$
 - 4) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1$
 - 5) $y = \frac{\ln x}{x^5}$
 - 6) $y = \frac{x \ln x}{1 + x}$
 - 7) $y = \sqrt{x} \log_3 x$
 - 8) $y = \frac{5^x}{\log_5 x}$
6. Исследуйте функцию на экстремум: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Исследуйте данную функцию на перегиб.
7. Найдите производную функции: $f(x) = e^x(1 + x^2)$.
8. Исследуйте функцию на экстремум: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Исследуйте данную функцию на перегиб.
9. Исследуйте функцию на экстремум: $y = 4x^3 + 6x^2$. Исследуйте данную функцию на перегиб.
10. Найдите интервалы возрастания и убывания функции: $f(x) = 2x^2 - \frac{4}{3}x^3$. Исследуйте данную функцию на перегиб.
11. Найдите производную функции: $f(x) = x^2 \ln x$
12. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции: $f(x) = 6 \sin x - \cos x$ в точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{2}$.
13. Найдите производную функции: $f(x) = \frac{2^x}{x^3}$
14. Найдите экстремальные значения функции: $f(x) = 2x^3 - 6x$. Исследуйте данную функцию на перегиб.
15. Найдите наклон касательной к кривой $y = x^2 - 4$ в точке с абсциссой 2.

16. Найдите наклон касательной к кривой $y = x^2 - 2x + 3$ в точке с абсциссой 1.

Интегральное исчисление

1) $\int (x^7 + 4x) dx$

5) $\int_2^3 \frac{dx}{x^3}$

8) $\int (x^9 - 1) dx$

12) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^8}$

2) $\int (\frac{1}{x} + 7^x) dx$

6) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$

9) $\int (e^x - \frac{1}{x}) dx$

13) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{3x-2}}$

3) $\int (e^x - \frac{1}{x^{50}}) dx$

7) $\int_1^e \frac{(\ln x)^3 dx}{x}$

10) $\int (\frac{1}{x^{40}} - 6^x) dx$

14) $\int_1^e \frac{(\ln x)^4 dx}{x}$

4) $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$

11) $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$

Найти неопределенные интегралы:

1. $\int x^8 dx$

2. $\int 5 \cos x dx$

3. $\int \frac{2 dx}{\sin^2 x}$

4. $\int 6^x dx$

5. $\int \frac{3 dx}{x}$

6. $\int \frac{dx}{x^6}$

11. $\int (2x^2 + 3x - 5)^3 (4x + 3) dx$.

Найти определенные интегралы:

7. $\int_0^2 x^3 dx$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

9. $\int_1^e \frac{\ln^6 x dx}{x}$

10. $\int_0^1 \sqrt{7x^3 + 2x^2} (21x^2 + 4x) dx$

12. Найдите функции, производной которой является функция: $f(x) = \frac{1}{9 + x^2}$

13. Найдите все первообразные функции $f(x) = \frac{2}{\sin^2 x} - \cos x + 4x^2 - 3$

14. Скорость движения тела задана уравнением $6t^2 - 2t \frac{M}{c}$. Найдите путь, пройденный за 10 с от начала движения.

15. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 2 \sin x$, $y=0$, $x=0$, $x=\pi/2$. Сделайте рисунок.

16. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 4 - x^2$, $y = 3$. Сделайте рисунок.

17. Для функции $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2}$ найти первообразную, график которой проходит через точку М (1; -5).

18. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 + 1$, $y = 2$. Сделайте рисунок.

19. Найдите все первообразные функции: $f(x) = x^4 + 3x^2 - 5$.

20. Найдите первообразную функции: $f(x) = 10x^4 + 2x$, значение которой при $x = 0$ равно 6.

Элементы линейной алгебры.

1. Вычислить линейную комбинацию матриц $2A - E$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

2. Найти произведения AB и BA , если они существуют

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

3. Вычислить $A \cdot A^T$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & -2 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

4. Найдите значение матричного многочлена $f(A)$, если

$$f(x) = 3x^2 + 2x + 5 \quad \text{и} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Вычислить $|A| + 100$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 & 5 & 11 \\ 0 & 5 & -6 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 88 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 76 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

6. Вычислите определитель матрицы A по правилу треугольника, если

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 4 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

7. Вычислить определитель разложением по какой-нибудь строке или

столбцу:
$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 6 & -1 & -8 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

8. Вычислить A^{-1} , если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

9. Для матрицы из предыдущего задания вычислить $|A^{-1}|$

10. Решить уравнение:
$$\begin{vmatrix} x+2 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & x-1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

11. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

12. Вычислить определитель матрицы A , если $A = \begin{pmatrix} 10 & -7 \\ 11 & -6 \end{pmatrix}$

13. Решить уравнение: $\begin{vmatrix} x+3 & x+1 \\ x-1 & x-2 \end{vmatrix} = 0$

14. Вычислить определитель третьего порядка, разложением по какой – либо

строке или столбцу: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

15. Найти $B = A \times A^T$ и вычислить определитель полученной матрицы B по

правилу треугольников, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

16. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5 \\ 7x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

17. Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases}$$

18. Исследовать систему линейных уравнений, если система совместна, то найти общее и одно частное решение.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 16 \\ 5x_1 + 4x_2 - 9x_3 - 4x_4 = 14 \end{cases}$$

19. Решить однородную систему уравнений. Указать общее решение и фундаментальную систему решений.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 13x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 7x_3 + 9x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 10x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

20. Найти все базисные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 8 \\ 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 - 2x_4 = 17 \\ -3x_1 - 9x_2 - 11x_3 + 3x_4 = -23 \\ -4x_1 - 12x_2 - 15x_3 + 4x_4 = -31 \end{cases}$$

21. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -13, \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = -1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 11, \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 19. \end{cases}$$

22. Решить систему уравнений двумя способами: используя обратную

матрицу и формулы Крамера.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 19, \\ 7x_1 + 8x_2 - 1 = 0. \end{cases}$$

23. Решить систему:
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -8, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$$

24. Обувная фабрика специализируется по выпуску изделий трех видов:

сапог, кроссовок и ботинок; при этом используется сырье трех типов: А, В, С. Нормы расхода каждого из них на одну пару обуви и объем расхода сырья на один день заданы таблицей:

Вид сырья	Нормы расхода сырья на одну пару (усл. ед.)			Расход сырья на 1 день (усл. ед.)
	Сапоги	Кроссовки	Ботинки	
А	5	3	4	2700
В	2	1	1	900
С	3	2	2	1600

Найти ежедневный объем выпуска каждого вида обуви.

Линейное программирование.

1. Решить задачу линейного программирования геометрически:

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \geq -12 \\ 5x_1 + 12x_2 \leq 60 \\ 7x_1 + 8x_2 \leq 56 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \quad Z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

2. Предприятию нужно изготовить 2 вида продукции, для обработки которой используются 3 группы машин – А, В, С. Данные в таблице:

Тип машин	Виды продукции		Общее время машинной работы за год (час.)
	1	2	
А	2	1	600
В	2	4	800
С	---	3	450
Прибыль от реализации продукции (ден. ед.)	2	3	

а) Найти план выпуска продукции, при котором прибыль от реализации будет максимальной.

б) Проанализировать модель на чувствительность: до какой степени целесообразно увеличить общее время работы машины типа А, для того, чтобы прибыль увеличилась? Каков тогда станет план выпуска продукции? Какова будет величина прибыли?

3. На предприятии организуется цех, для использования остающихся от основного производства материалов. Цех может освоить выпуск двух видов продукции: тумбочек и шкафов для посуды. Эти виды продукции могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), но количество рабочих мест в цехе и ресурсы основных материалов ограничены. Для производства одной тумбочки необходимо 5 м³ древесины, 1 м² стекла и 5 часов рабочего времени. Для производства шкафа для посуды необходимо 1 м³ древесины, 4 м² стекла и 8 часов рабочего времени. Прибыль от продажи тумбочки составляет 3 у. е., а от продажи книжного шкафа 2 у. е. Остатки древесины от основного производства составляют 45 м³, а стекла 32 м². Фонд ресурсов рабочего времени составляет 80 часа. Требуется запланировать цеху ежемесячный выпуск продукции, обеспечив при этом максимальную прибыль.

Составить математическую модель задачи и решить ее геометрическим методом и симплекс-методом.

4. Кондитерская фабрика выпускает печенье и конфеты. На производство одного килограмма печенья требуется 1 час работы пекаря, 3 часа работы упаковщика, 10 часов на доставку в магазины готового продукта. На производство одного килограмма конфет требуется 6 часов работы пекаря, 1 час работы упаковщика и 12 часов на доставку готового продукта в магазины. Пекарный цех работает 36 часов в неделю, упаковочный 27 часов в неделю, а служба доставки 120 часов в неделю. Прибыль от реализации 1 кг печенья составляет 1 у.е., а от реализации 1 кг конфет 2 у.е. Составить план производства печенья и конфет, обеспечивающий максимальную прибыль. Составить математическую модель задачи и решить ее геометрическим методом и симплекс-методом.

5. Проверить, открытой или закрытой является транспортная задача, заданная распределительной таблицей:

а)

	100	250	400	150
300				
250				
350				

б)

	250	500	120
180			
290			
250			
220			

6. Проверить, открытой или закрытой является транспортная задача, заданная распределительной таблицей, если задача закрытая, то составить начальное опорное решение транспортной задачи:

а)

	40	40	30	50
40	3	1	5	4
60	6	1	2	3
60	4	4	5	7

б)

	200	400	400	800
200	1	6	9	3
400	3	2	2	4

600	4	5	4	7
200	1	4	3	9

7. На складах A_1, A_2, A_3 имеются запасы продукции в количествах 150, 300 и 500 тонн соответственно. Потребители B_1, B_2, B_3, B_4 должны получить эту продукцию в количествах 200, 200, 350 и 200 тонн соответственно. Найти такой вариант прикрепления поставщиков к потребителям, при котором сумма затрат на перевозки была бы минимальной. Расходы по перевозке 1 тонны продукции заданы матрицей (у. е.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

8. Требуется спланировать перевозку строительного материала с трех заводов к четырем строительным площадкам, используя железнодорожную сеть. На четырех площадках требуется соответственно 5, 10, 20, 15 вагонов строительных материалов. Возможности заводов равны 10, 15, 25 вагонов соответственно. Расходы по перевозке 1 вагона заданы матрицей (у. е.)

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 6 & 4 \\ 1 & 9 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$